Θεωρία Πιθανοτήτων **Μάϊος 2020**
Μ. Ζαζάνης **Παράδοση: 28 Ιουνίου 2020**

Πρόβλημα 1. Έστω $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ δύο ακολουθίες ενδεχομένων σε ένα χώρο πιθανότητας. Να δείξετε ότι

$$\left(\limsup_n A_n\right) \cap \left(\limsup_n B_n\right) \supseteq \limsup_n (A_n \cap B_n) \; .$$

Να δώσετε ένα παράδειγμα για το οποίο το σύνολο δεξιά είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου αριστερά στην παραπάνω σχέση.

Πρόβλημα 2. Έστω $\{E_n\}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. εκθετικά κατανεμημένες με $P(E_n > x) = e^{-x}$, $x > 0$. Να δείξετε ότι

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τα δύο λήμματα Borel-Cantelli και το γενονός ότι για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \;\; x_n < 1+\epsilon \quad \text{για καθε } n \geq n_0(\epsilon) \\ \text{και} \\ \forall \epsilon > 0 \;\; x_{n_k} > 1-\epsilon \quad \text{για κάποια υπακολουθία } \{n_k\}. \end{cases}$$

Πρόβλημα 3. Έστω $\{X_n; n \geq 1\}$ ανεξάρτητηες τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι $P(\sup_{n\geq 1} X_n < \infty) = 1$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > M) < \infty \qquad \text{για κάποιο } M > 0.$$

Πρόβλημα 4. Αν X, Y, είναι τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ δείξτε ότι

$$\sup_{A\in\mathscr{F}} |P(X \in A) - P(Y \in A)| \;\leq\; P(X \neq Y).$$

Πρόβλημα 5. Έστω $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$, X, Y, τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανοτήτων τέτοιες ώστε

$$\begin{array}{ll} (a) & 0 \leq X_n \leq Y_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \\ (b) & X_n \to X, \quad Y_n \to Y \quad \text{όταν } n \to \infty. \\ (c) & EY_n \to EY \quad \text{όταν } n \to \infty. \end{array}$$

Να δείξετε ότι υπό αυτές τις συνθήκες $EX_n \to EX$ και επομένως ότι η πρόταση αυτή γενικεύει το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Πρόβλημα 6. α) Έστω $\{X_n\}$ μια μονότονη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Αν $X_n \xrightarrow{P} X$ τότε να δείξετε ότι $X_n \to X$ w.p. 1.
β) Έστω $\{X_n\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Δείξτε ότι $X_n \to X$ w.p. 1 αν και μόνον αν

$$\sup_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$