Θεωρία Πιθανοτήτων

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Η εργασία για το πρώτο τμήμα του μαθήματος είναι
να λύσετε τις οκτώ ασκήσεις που υπάρχουν στο κείμενο.

27 Φεβρουαρίου 2013

Κεφάλαιο 1

Χώροι Πιθανοτήτων

1.1 Οικογένειες Συνόλων

Όλα τα σύνολα στα οποία θα αναφερόμαστε θα θεωρούμε ότι είναι υποσύνολα ενός θεμελιώδους συνόλου Ω, του «δειγματικού χώρου». Θα συμβολίζουμε με καλλιγραφικά γράμματα, $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$, οικογένειες συνόλων, με κεφαλαία λατινικά γράμματα, A, B, C, σύνολα (τα οποία είναι υποσύνολα του Ω, και με πεζά, a, b, c, x, y, z, ω, στοιχεία των συνόλων.

Αν $\{A_i; i \in I\}$ είναι μια οικογένεια συνόλων η ένωσή τους $\cup_{i \in I} A_i$ είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega : \exists i \in I$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_i\}$. Η τομή τους, $\cap_{i \in I} A_i$ είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega : \forall i \in I \ \omega \in A_i\}$. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου των δεικτών I, δηλαδή το πλήθος των συνόλων των οποίων σχηματίζουμε την ένωση μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο.

Νόμοι του De Morgan. Για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων, $\{A_i; i \in I\}$ ισχύει ότι

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Ορισμός 1. *Μια οικογένεια συνόλων $\mathscr{A}$ ονομάζεται* πεδίο *(ή* άλγεβρα*) αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες*

Π.1. $\Omega \in \mathscr{A}$.

Π.2. $A \in \mathscr{A}$ *συνεπάγεται ότι* $A^c \in \mathscr{A}$.

Π.3. *Αν* A_i, $i = 1, 2, \ldots n$ *ανήκουν στο* $\mathscr{A}$ *τότε* $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Παρατηρούμε ότι η τρίτη συνθήκη που ονομάζεται ιδιότητα του «κλειστού υπό πεπερασμένες ενώσεις» εξασφαλίζεται αρκεί να ισχύει η φαινομενικά ασθενέστερη συνθήκη $A, B \in \mathscr{A}$ συνεπάγεται $A \cup B \in \mathscr{A}$. Επίσης, λόγω των νόμων του de Morgan και της συνθήκης Π.2, η ισχύς της Π.3 εξασφαλίζεται αν $A, B \in \mathscr{A}$ συνεπάγεται $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Παραδείγμα 1. Έστω $\Omega = (0, 1]$ και $\mathscr{A}$ το σύνολο όλων των συνόλων της μορφής $\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n \leq 1$. Μπορεί κανείς να ελέγξει εύκολα σ' αυτή την περίπτωση ότι το $\mathscr{A}$ είναι πεδίο.

Ορισμός 2. *Μια οικογένεια συνόλων $\mathscr{F}$ ονομάζεται* σ–πεδίο *(ή* σ–άλγεβρα*) αν ικανοποιεί τις συνθήκες*

ΣΠ.1. $\Omega \in \mathscr{F}$.

ΣΠ.2. $A \in \mathscr{F}$ *συνεπάγεται ότι* $A^c \in \mathscr{F}$.

ΣΠ.3. *Αν* A_i, $i = 1, 2, \ldots$ *ανήκουν στο* $\mathscr{F}$ *τότε* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Παρατηρείστε ότι η μοναδική, αλλά ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στις δύο έννοιες είναι ότι το σ–πεδίο είναι κλειστό ως προς *αριθμήσιμες* και όχι απλώς πεπερασμένες ενώσεις. Είναι επίσης προφανές, από τους νόμους του de Morgan και τις συνθήκες ΣΠ.2, ΣΠ.3 ότι, αν A_i, $i = 1, 2, \ldots$, ανήκουν στο $\mathscr{F}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$, δηλαδή ότι το σ–πεδίο είναι κλειστό και ως προς αριθμήσιμες τομές.

Για παράδειγμα το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω είναι σ–πεδίο.

Ένα σ–πεδίο είναι και πεδίο αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Το πεδίο του παραδείγματος 1 δεν είναι σ–πεδίο. Για να το διαπιστώσουμε θεωρούμε τα σύνολα $A_n = (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n}]$, $n = 3, 4, \ldots$. Τα σύνολα αυτά ανήκουν στο $\mathscr{A}$ ενώ η ένωσή τους $\cup_{n=3}^{\infty} A_n = (\frac{1}{2}, 1)$ δεν ανήκει στο $\mathscr{A}$. Συνεπώς το $\mathscr{A}$, όπως ορίστηκε στο Παράδειγμα 1 δεν είναι κλειστό ως προς αριθμήσιμες τομές.

Πρόταση 1. *Η τομή μιας οποιασδήποτε κλάσης σ-πεδίων είναι πάλι σ-πεδίο.*

Απόδειξη: Εστω $\mathscr{F}_t$ ένα σ–πεδίο για κάθε $t \in \mathbb{T}$. (Το σύνολο δεικτών $\mathbb{T}$ μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμο, ή υπεραριθμήσιμο.) Θα δείξουμε ότι $\mathscr{F} := \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathscr{F}_t$ είναι σ–πεδίο. Πράγματι, $\Omega \in \mathscr{F}_t$ για κάθε t αφού κάθε $\mathscr{F}_t$ είναι σ–πεδίο, συνεπώς $\Omega \in \mathscr{F}$. Παρομοίως, αν $A \in \mathscr{F}$ τότε $A \in \mathscr{F}_t$ $\forall t \in \mathbb{T}$, άρα $A^c \in \mathscr{F}_t$ $\forall t \in \mathbb{T}$ (αφού καθένα από τα $\mathscr{F}_t$ είναι σ–πεδίο). Συνεπώς, $A^c \in \mathscr{F}$.

Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι, αν $A_i, i = 1, 2, \ldots$ ανήκει στο $\mathscr{F}$ τότε τα A_i ανήκουν *σε κάθε* $\mathscr{F}_t$. Αφού το $\mathscr{F}_t$ είναι σ–πεδίο αυτό σημαίνει ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$ και συνεπώς $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathscr{F}_t = \mathscr{F}$. ∎

Ορισμός 3. *Αν $\mathscr{A}$ είναι ένα πεδίο υποσυνόλων του Ω υπάρχει πάντα ένα σ-πεδίο $\mathscr{F}$ που περιέχει όλα τα σύνολα του $\mathscr{A}$ και το οποίο είναι το μικρότερο τέτοιο σ-πεδίο (υπό την έννοια ότι κάθε άλλο σ-πεδίο που περιέχει το $\mathscr{A}$ περιέχει επίσης και το $\mathscr{F}$). Το $\mathscr{F}$ θα ονομάζεται σ-πεδίο που γεννάται από το $\mathscr{A}$.*

Ο παραπάνω ορισμός δικαιολογείται από το εξής επιχείρημα. Έστω $\{\mathscr{F}_t; t \in \mathbb{T}\}$ η κλάση όλων των σ–πεδίων που περιέχουν το πεδίο $\mathscr{A}$. Ξέρουμε ότι η κλάση αυτή δεν είναι κενή αφού περιέχει το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(\Omega)$. Αν θέσουμε $\mathscr{F} = \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathscr{F}_t$ τότε έχουμε κατασκευάσει το σ–πεδίο που γεννάται από το $\mathscr{A}$, είναι δε σαφές λόγω της κατασκευής αυτής ότι κάθε άλλο σ–πεδίο που περιέχει το $\mathscr{A}$ περιέχει και το $\mathscr{F}$.

1.2 Όρια ακολουθίας συνόλων

Μια ακολουθία συνόλων $\{B_i; i \in \mathbb{N}\}$ θα ονομάζεται αύξουσα αν $B_i \subset B_{i+1}$ για κάθε i. Αντίστοιχα, η ακολουθία θα ονομάζεται φθίνουσα αν $B_i \supset B_{i+1}$ για κάθε i. Μια αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία συνόλων θα ονομάζεται μονοτονική. Το όριο μια αύξουσας ακολουθίας συνόλων ορίζεται ως $\lim_n B_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Παρόμοια, για μια φθίνουσα ακολουθία ορίζουμε $\lim_n B_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Έστω A_i, $i = 1, 2, \ldots$ μια οιαδήποτε ακολουθία συνόλων (όχι υποχρεωτικά μονοτονική). Ορίζουμε το κατώτερο όριο (limes inferior) της ακολουθίας ως το σύνολο

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{1.1}$$

Όμοια ορίζουμε το ανώτερο όριο (limes superior) ως το σύνολο

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{1.2}$$

Παρατηρείστε στον ορισμό (1.1) ότι, τα σύνολα $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία: $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \cdots$. Αν $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ τότε $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ το οποίο σημαίνει ότι $\omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ (και συνεπώς για όλα τα επόμενα n). Επομένως το $\liminf$ μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων εκείνων των στοιχείων ω που ανήκουν *σε κάθε* A_n *εκτός από ένα πεπερασμένο αρχικό πλήθος*.

Παρόμοια, από τον ορισμό του ανωτέρου ορίου (1.2) βλέπουμε ότι τα σύνολα $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αποτελούν μια φθίνουσα ακολουθία: $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \cdots$. Αν $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ τότε $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ το οποίο σημαίνει ότι $\omega \in \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k$ για *άπειρο πλήθος από τους δείκτες* n. Επομένως το $\limsup$ μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων εκείνων των στοιχείων ω που ανήκουν *σε άπειρο πλήθος από τα* A_n.

Παρατηρούμε επίσης ότι, από τους νόμους του de Morgan,

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c, \quad \text{και} \quad (\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c.$$

Μπορούμε επίσης εύκολα να δείξουμε οτι

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.$$

Πράγματι, για κάθε $m > n$ ισχύει ότι $\bigcap_{k=n}^{m} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ απ΄ όπου βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k =: C_n$. Αλλά τόσο η ακολουθία $\{B_n\}$ όσο και η $\{C_n\}$ είναι μονοτονικές, συνεπώς $\lim_n B_n \subset \lim_n C_n$.

1.3 Αξιωματικός Ορισμός Μέτρου Πιθανότητας

Θα ονομάζουμε *συνολοσυνάρτηση* μια συνάρτηση ορισμένη πάνω σε μια κλάση υποσυνόλων του Ω με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς. Είναι σαφές ότι θέλουμε να ορίσουμε το μέτρο πιθανότητας ως μια συνολοσυνάρτηση με τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

Η δυσκολία έγκειται στο πεδίο ορισμού του μέτρου πιθανοτήτων. Στην πιο στοιχειώδη θεώρηση μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο πιθανότητας πάνω σε ένα πεδίο υποσυνόλων του Ω. Αφού κάθε υποσύνολο είναι ένα ενδεχόμενο, η λογική υπαγορεύει ότι η κλάση των υποσυνόλων που μπορούν να είναι ενδεχόμενα πρέπει να είναι κλειστή ως προς ενώσεις, τομές και συμπληρώματα. Αυτή η θεώρηση μπορεί να είναι επαρκής για στοιχειώδη προβλήματα θεωρίας πιθανοτήτων, το μαθηματικά ενδιαφέρον τμήμα της θεωρίας πιθανοτήτων όμως, συμπεριλαμβανομένου και του θεμελιώδους νόμου των μεγάλων αριθμών, απαιτεί όπως θα δούμε όχι μόνο πεπερασμένες αλλά και αριθμήσιμες ενώσεις και τομές. Συνεπώς το φυσικό πεδίο ορισμού του μέτρου πιθανοτήτων είναι ένα σ–πεδίο ενδεχομένων.

Ορισμός 4. *Έστω $\mathscr{F}$ ένα σ–πεδίο υποσυνόλων του Ω. Η συνολοσυνάρτηση $P : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}$ θα ονομάζεται μέτρο πιθανότητας στο $\mathscr{F}$ αν*

ΜΠ.1 $P(\Omega) = 1$.

ΜΠ.2 *Για κάθε $A \in \mathscr{F}$, $P(A) \in [0,1]$.*

ΜΠ.3 *Για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$, στο $\mathscr{F}$ τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$, ισχύει ότι*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.3}$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται *αριθμήσιμη προσθετικότης* για το μέτρο πιθανότητας και είναι η θεμελιώδης ιδιότητα ενός μέτρου πιθανοτήτων.

Ισοδύναμα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αντί για την αριθμήσιμη προσθετικότητα μπορεί να υποθέσει κανείς τον συνδιασμό της πεπερασμένης προσθετικότητας δηλαδή την

ΜΠ.3′ Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο $\mathscr{F}$ τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$, ισχύει ότι

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.4}$$

και την λεγόμενη "μονοτονική συνέχεια στο μηδέν" η οποία σημαίνει ότι

ΜΠ.4 Για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots,$ τέτοια ώστε $A_i \supset A_{i+1}$ και $\lim_n A_n := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ ή

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n). \tag{1.5}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε την ισοδυναμία της ΜΠ.3 με τις ΜΠ.3′ και ΜΠ.4.

Πράγματι, η ΜΠ.3 συνεπάγεται την ΜΠ.3′ αν διαλέξουμε $A_i = \emptyset$ για κάθε $i > n$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι συνεπάγεται και την ΜΠ.4. Έστω ότι B_i είναι μια φθίνουσα ακολουθία, τέτοια ώστε $B_i \downarrow \emptyset$. Τα σύνολα $C_i = B_i \setminus B_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, είναι *ξένα μεταξύ τους* και ικανοποιούν την σχέση $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = B_1$. Συνεπώς, λόγω της αριθμήσιμης προσθετικότητας, ισχύει ότι

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_{i+1}) - P(B_i). \tag{1.6}$$

Η τελευταία αυτή σχέση βασίζεται στην πεπερασμένη προσθετικότητα: $B_{i+1} \subset B_i$ συνεπάγεται ότι $P(B_i \setminus B_{i+1}) = P(B_i) - P(B_{i+1})$. Δεδομένου ότι η σειρά (1.6) είναι τηλεσκοπική, έχουμε ότι

$$P(B_1) = P(B_1) - \lim_{n \to \infty} P(B_n)$$

απ′ όπου συνάγουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ και συνεπώς ότι η ΜΠ.4 ισχύει. Αρα δείξαμε ότι ΜΠ.3 $\Rightarrow$ (ΜΠ.3′ και ΜΠ.4).

Μένει να δείξουμε και ότι (ΜΠ.3′ και ΜΠ.4) $\Rightarrow$ ΜΠ.3. για κάθε n ότι

Θέτουμε $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $B_n = C \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ (δηλαδή $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$.) Προφανώς ισχύει ότι $B_i \supset B_{i+1}$ και $B_i \downarrow \emptyset$. Από την ΜΠ.4 επομένως έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. Αλλά από την πεπερασμένη προσθετικότητα έχουμε $P(B_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ και $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Συνεπώς

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Αφήνοντας $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

1.4 Το Θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε έναν αξιωματικό ορισμό ενός μέτρου πιθανότητας ορισμένου πάνω σε ένα σ–πεδίο. Δεδομένου όμως κάποιου σ–πεδίου, δεν είναι εν γένει καθόλου προφανές πώς να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας το οποίο να ικανοποιεί τις συνθήκες ΜΠ.1–ΜΠ.3 καθώς και αν αυτό είναι δυνατό. Η συνηθισμένη οδός για τον ορισμό ενός μέτρου πιθανότητας είναι να το ορίσουμε πρώτα σε μια απλούστερη κλάση συνόλων και στη συνέχεια να το επεκτείνουμε στο σ–πεδίο που γεννάται από αυτή την κλάση συνόλων. Το ακόλουθο θεώρημα (που διατυπώθηκε για γενικά μέτρα στις αρχές του 20ου αιώνα από τον Κ. Καραθεοδωρή) μας εξασφαλίζει αυτή την δυνατότητα. Πριν το διατυπώσουμε όμως ας ξεκαθαρίσουμε την κατάσταση με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5. *Εστω $\mathscr{F}_0$ ένα πεδίο υποσυνόλων του Ω και $P_0 : \mathscr{F} \mapsto [0,1]$ μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη στο σ' αυτό. Το P_0 θα ονομάζεται μέτρο πιθανότητας στο $\mathscr{F}_0$ αν*

ι) $P_0(\Omega) = 1$.

ιι) Για κάθε ακολουθία συνόλων $\{A_i\}$ του $\mathscr{F}_0$ τέτοιων ώστε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}_0$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$, ισχύει η αριθμήσιμη προσθετικότητα:

$$P_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_0(A_i).$$

Η διαφορά ανάμεσα σ' αυτόν τον ορισμό και σ' εκείνον της προηγουμένης παραγράφου είναι ότι εδώ υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού του P_0 είναι ένα *πεδίο* και όχι ένα *σ–πεδίο*. Συνεπώς η αριθμήσιμη προσθετικότητα δεν ισχύει για κάθε ακολουθία συνόλων του $\mathscr{A}$ αλλά μόνον για εκείνες τις ακολουθίες των οποίων η ένωση συμβαίνει να ανήκει επίσης στο $\mathscr{F}_0$.

Θεώρημα 1 (Καραθεοδωρή). *Έστω ένα μέτρο πιθανότητας P_0 ορισμένο στο πεδίο $\mathscr{F}_0$ και έστω $\mathscr{F}$ το σ–πεδίο που γεννάται από το $\mathscr{F}_0$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας P το οποίο επεκτείνει το P_0 στο $\mathscr{F}$, δηλαδή ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο στο $\mathscr{F}$ και το οποίο συμφωνεί με το P_0 στο $\mathscr{F}_0$.*

(Προσθέτουμε την διευκρίνιση ότι τα μέτρα πιθανότητας P_0 και P συμφωνούν στο $\mathscr{F}_0$ αν, για κάθε $A \in \mathscr{F}_0$ ισχύει ότι $P(A) = P_0(A)$.) Η απόδειξη του θεωρήματος επέκτασης θα δοθεί στην συνέχεια. Πρώτα θα συζητήσουμε την έννοια του εξωτερικού μέτρου πιθανότητας.

Εστω P_0 ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο πάνω σε ένα πεδίο $\mathscr{F}_0$. Για *κάθε* υποσύνολο A του Ω ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο πιθανότητας P^* ως

$$P^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} P_0(A_i) : A_i \in \mathscr{F}_0, i = 1, 2, \ldots, \text{ και } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}. \tag{1.7}$$

Το εξωτερικό μέτρο έχει τις εξής ιδιότητες:

1.) Ισχύει ότι $P^*(\emptyset) = 0$. Πράγματι, αρκεί να διαλέξουμε $A_i = \emptyset$ στον ορισμό.

2.) Το εξωτερικό μέτρο είναι μονοτονικό. Πράγματι, αν $A \subset B$ τότε

$$\left\{A_i \in \mathscr{F}_0, i = 1, 2, \ldots, : B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \subset \left\{A_i \in \mathscr{F}_0, i = 1, 2, \ldots, : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}.$$

(Αν μια ακολουθία συνόλων καλύπτει το B, τότε καλύπτει και το A που περιέχεται στο B.) Αλλά το infimum πάνω σε ένα σύνολο που περιέχει κάποιο άλλο θα είναι μικρότερο και επομένως $P^*(A) \leq P^*(B)$.

3.) Για κάθε σύνολο $A \in \mathscr{F}_0$ ισχύει οτι $P^*(A) \leq P_0(A)$. Αυτό είναι προφανές αφού μπορούμε να διαλέξουμε $A_1 = A$, $A_i = \emptyset$, $i = 2, 3, \ldots$.

4.) Το μέτρο P^* είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό, δηλαδή για κάθε $B_1, B_2, \ldots$, ισχύει ότι

$$P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P^*(B_i). \tag{1.8}$$

Τονίζουμε ότι στην παραπάνω σχέση τα B_i είναι αυθαίρετα υποσύνολα του Ω, δεν είναι δε κατ΄ ανάγκη ξένα μεταξύ τους.

Απόδειξη της υποπροσθετικότητας: Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένος θετικός αριθμός. Για δεδομένο i διαλέγω μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathscr{F}_0$, $C_{i1}, C_{i2}, \ldots$ τέτοια ώστε

$$B_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij} \tag{1.9}$$

και

$$P^*(B_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} P_0(C_{ij}) - \epsilon 2^{-i}. \tag{1.10}$$

Αυτό είναι δυνατό, από τον ορισμό του P^*. Αφού η (1.9) ισχύει για κάθε i έχουμε ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} C_{ij}$. Άρα, αφού η οικογένεια συνόλων $\{C_{ij}\}$ καλύπτει το $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου ισχύει οτι

$$P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_0(C_{ij}) \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty}\left(P^*(B_i) + \epsilon 2^{-i}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} P^*(B_i) \;+\; \epsilon.$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και ως $\sum_{i=1}^{\infty} P^*(B_i) \geq P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) - \epsilon$ και συνεπώς, αφού το ϵ είναι αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (1.8).

Ορισμός 6. *Ένα σύνολο A θα ονομάζεται μετρήσιμο αν, για κάθε $E \subset \Omega$ ισχύει ότι*

$$P^*(E) = P^*(A \cap E) + P^*(A^c \cap E). \tag{1.11}$$

Παρατηρείστε ότι $E = (A \cap E) \cup (A^c \cap E)$ και συνεπώς, λόγω της υποπροσθετικότητας, έχουμε $P^*(E) \leq P^*(A \cap E) + P^*(A^c \cap E)$. Επομένως η (1.11) ισχύει αν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$P^*(E) \geq P^*(A \cap E) + P^*(A^c \cap E). \tag{1.12}$$

Έστω $\mathscr{M}$ η οικογένεια όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω, δηλαδή

$$\mathscr{M} := \{A \subset \Omega : P^*(E) = P^*(A \cap E) + P^*(A^c \cap E), \;\; \forall E \subset \Omega\}. \tag{1.13}$$

Λήμμα 1. *Η οικογένεια $\mathscr{M}$ είναι πεδίο.*

Απόδειξη: Η $\mathscr{M}$ είναι προφανώς κλειστή για συμπληρώματα από τον ορισμό της. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή και για πεπερασμένες τομές, δηλαδή ότι, αν $A, B \in \mathscr{M}$ τότε $A \cap B \in \mathscr{M}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$ μαζί με την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&P^*(A \cap B \cap E) + P^*((A \cap B)^c \cap E) \\
&\quad\leq \; P^*(A \cap B \cap E) + P^*(A^c \cap B \cap E) + P^*(A \cap B^c \cap E) + P^*(A^c \cap B^c \cap E) \\
&\quad= \; P^*(B \cap E) + P^*(A \cap B^c \cap E) + P^*(A^c \cap B^c \cap E) \qquad (A \in \mathscr{M}) \\
&\quad= \; P^*(B \cap E) + P^*(B^c \cap E) \qquad (A \in \mathscr{M}) \\
&\quad= \; P^*(E) \qquad (B \in \mathscr{M}).
\end{aligned}$$

Αφού η $\mathscr{M}$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένες τομές και συμπληρώματα είναι κλειστή και κάτω από πεπερασμένες ενώσεις από τους νόμους του de Morgan και συνεπώς είναι πεδίο. ∎

Λήμμα 2. *Αν* $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}$ *και* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *για* $i \neq j$ *τότε*

$$P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i). \tag{1.14}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα την πεπερασμένη προσθετικότητα. Έστω $A, B \in \mathscr{M}$, $A \cap B = \emptyset$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P^*(A \cup B) &= P^*(A \cap (A \cup B)) + P^*(A^c \cap (A \cup B)) && (A \in \mathscr{M}) \\ &= P^*(A) + P^*(B). && (A \cap B = \emptyset) \end{aligned}$$

Η πεπερασμένη προσθετικότητα προκύπτει άμεσα με επαγωγή. Για να επεκτείνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για αριθμήσιμο αριμθό συνόλων ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι

$$\sum_{i=1}^{n} P^*(A_i) \ = \ P^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ \leq \ P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

όπου η πρώτη ισότητα οφείλεται στην πεπερασμένη προσθετικότητα που μόλις αποδείξαμε και η δεύτερη ανισότητα στην μονοτονικότητα του P^*. Αφού η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε n, ισχύει ότι

$$P^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \ \geq \ \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i).$$

Η σχέση αυτή μαζί με την υποπροσθετικότητα (1.8) δίνουν την (1.14). ∎

Λήμμα 3. *Η οικογένεια* $\mathscr{M}$ *είναι σ–πεδίο.*

Απόδειξη: Δεδομένου ότι η $\mathscr{M}$ είναι κλειστή κάτω από συμπληρώματα, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι κλειστή κάτω από αριθήσιμες ενώσεις. Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι, αν $A_i \in \mathscr{M}$, $i = 1, 2, \ldots$, τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$. Για να αποδείξουμε αυτό το τελευταίο αρκεί να δείξουμε ότι

$$P^*(E) \geq P^*\left((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap E\right) + P^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c \cap E). \tag{1.15}$$

(Θυμηθείτε την (1.12).) Ορίζουμε τώρα τα σύνολα $D_1 = A_1$, $D_i = A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c$, $i = 2, 3, \ldots$. Προφανώς τα $\{D_i\}$ είναι ξένα μεταξύ τους και επιπλέον ανήκουν όλα στο $\mathscr{M}$ αφού είναι πεδίο. Ακόμα ισχύει ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε εξ' αρχής ότι τα $\{A_i\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα A_i είναι ξένα μεταξύ τους και ορίζουμε την ακολουθία συνόλων $B_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_i$. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας επαγωγικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $E \subset \Omega$

$$P^*(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} P^*(E \cap A_k). \tag{1.16}$$

Για $n = 1$ η παραπάνω σχέση είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι η (1.16) ισχύει για μια συγκεκριμένη τιμή του n και θα δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται την ισχύ της για $n+1$. Πράγματι, δεδομένου ότι $B_n \cap B_{n+1} = B_n$ και $B_n^c \cap B_{n+1} = A_{n+1}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P^*(E \cap B_{n+1}) &= P^*((E \cap B_{n+1}) \cap B_n) + P^*(E \cap B_{n+1}) \cap B_n^c) & (B_n \in \mathscr{M}) \\ &= P^*(E \cap B_n) + P^*(E \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P^*(E \cap A_k). \end{aligned}$$

Συνεπώς η (1.16) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δεδομένου ότι $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathscr{M}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P^*(E) &= P^*(E \cap \textstyle\bigcup_{k=1}^n A_k) + P^*(E \cap (\bigcup_{k=1}^n A_k)^c) \\ &= \sum_{k=1}^n P^*(E \cap A_k) + P^*(E \cap (\textstyle\bigcup_{k=1}^n A_k)^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^n P^*(E \cap A_k) + P^*(E \cap (\textstyle\bigcup_{k=1}^\infty A_k)^c). \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω μονοτονικότητας του P^* και, αφού ισχύει για κάθε n συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} P^*(E) &\geq \sum_{k=1}^\infty P^*(E \cap A_k) + P^*(E \cap (\textstyle\bigcup_{k=1}^\infty A_k)^c) \\ &\geq P^*(E \cap (\textstyle\bigcup_{k=1}^\infty A_k)) + P^*(E \cap (\bigcup_{k=1}^\infty A_k)^c) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα. Συνεπώς δείξαμε την εξίσωση (1.15). ∎

Λήμμα 4. *Το σ–πεδίο* $\mathscr{M}$ *περιέχει το πεδίο* $\mathscr{F}_0$ *και* $P^*(A) = P_0(A)$ *για κάθε* $A \in \mathscr{F}_0$.

Απόδειξη: Έστω $A \in \mathscr{F}_0$. Από τον ορισμό του P^* έχουμε ότι, για κάθε $E \subset \Omega$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $A_1, A_2, \ldots$, στο $\mathscr{F}_0$ τέτοια ώστε $P^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty P_0(A_i) - \epsilon$ και $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} &P^*(E \cap A) + P^*(E \cap A^c) \\ &\quad\leq P^*((\textstyle\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \cap A) + P^*((\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \cap A^c) && \text{(λόγω μονοτονικότητας)} \\ &\quad\leq \sum_{i=1}^\infty P^*(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^\infty P^*(A_i \cap A^c) && \text{(λόγω υποπροσθετικότητας)} \\ &\quad= \sum_{i=1}^\infty P^*(A_i \cap A) + P^*(A_i \cap A^c) \\ &\quad\leq \sum_{i=1}^\infty P_0(A_i \cap A) + P_0(A_i \cap A^c) && \text{(αφού } P^*(B) \leq P_0(B) \text{ για } B \in \mathscr{F}_0) \\ &\quad\leq \sum_{i=1}^\infty P_0(A_i) && \text{(προσθετικότης του } P_0 \text{ στο } \mathscr{F}_0) \\ &\quad\leq P^*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σειρά ανισοτήτων προκύπτει ότι $P^*(E \cap A) + P^*(E \cap A^c) \leq P^*(E)$ αφού το ϵ είναι αυθαίρετο και συνεπώς ότι $A \in \mathscr{M}$. Αλλά το A ήταν ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathscr{F}_0$ συνεπώς $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{M}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι, αν $A, A_1, A_2, \ldots$ ανήκουν στο $\mathscr{F}_0$ και $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ τότε έχουμε ότι $P_0(A) = P_0(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = P_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap A_i) = P_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P_0(A_i)$. Επομένως και

$$P^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} P_0(A_i) : A_i \in \mathscr{F}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A\right\} \geq P_0(A).$$

Αφού όμως ήδη ξέρουμε ότι $P^*(A) \leq P_0(A)$ συμπεραίνουμε ότι $P_0(A) = P^*(A)$ για $A \in \mathscr{F}_0$. ∎

Από τα λήμματα 1-4 συμπεραίνουμε ότι το $\mathscr{M}$ είναι ένα σ–πεδίο που περιέχει το $\mathscr{F}_0$ (και επομένως και το $\mathscr{F}$) πάνω στο οποίο έχουμε ορίσει ένα μέτρο (το $P = P^*$) το οποίο συμφωνεί με το P_0 πάνω στο $\mathscr{F}_0$. Μένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα δηλαδή το ότι, αν Q είναι ένα άλλο μέτρο που συμφωνεί με το P_0 στο $\mathscr{F}_0$ τότε συμφωνεί με το P στο $\mathscr{F}$. Πράγματι, για $A \in \mathscr{F}$,

$$\begin{aligned} P(A) &= P^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} P_0(A_i) : A_i \in \mathscr{F}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i) : A_i \in \mathscr{F}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A\right\} \\ &\geq \inf\left\{Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) : A_i \in \mathscr{F}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A\right\} \\ &\geq Q(A) \end{aligned}$$

Επομένως $P(A) \geq Q(A)$. Αλλά με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $P(A^c) \geq Q(A^c)$ δηλαδή ότι $P(A) \leq Q(A)$. Συνεπώς $P(A) = Q(A)$, πράγμα που σημαίνει ότι η επέκταση του μέτρου P_0 στο $\mathscr{F}$ είναι μοναδική. Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη του θεωρήματος του Καραθεοδωρή.

Κεφάλαιο 2

Τυχαίες Μεταβλητές

2.1 Μετρήσιμοι Χώροι - Μετρήσιμες συναρτήσεις

Έστω $f : \Omega \mapsto \Omega'$. Η συνάρτηση f ορίζει μια συνάρτηση (την οποία θα συμβολίζουμε πάλι με f) που απεικονίζει υποσύνολα του Ω σε υποσύνολα του Ω'. Συγκεκριμένα, αν $A \subset \Omega$, τότε $f(A) := \{\omega' \in \Omega' : \omega' = f(\omega)$ για κάποιο $\omega \in A\}$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $f(\Omega) = \Omega'$, δηλαδή ότι η απεικόνιση f είναι επί. Αν $\mathbb{T}$ είναι ένα σύνολο δεικτών, ισχύουν οι εξής βασικές σχέσεις

ι) $f(A^c) \supset f(A)^c$.

ιι) $f\left(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} A_t\right) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} f\left(A_t\right)$

ιιι) $f\left(\bigcap_{t\in\mathbb{T}} A_t\right) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}} f\left(A_t\right)$

Η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} ορίζεται ασχέτως αν η f είναι 1-1 και συμπεριφέρεται καλύτερα από την f υπό την έννοια ότι

α) $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

β) $f^{-1}\left(\bigcup_{t\in\mathbb{T}} A_t\right) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} f^{-1}\left(A_t\right)$

γ) $f^{-1}\left(\bigcap_{t\in\mathbb{T}} A_t\right) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}} f^{-1}\left(A_t\right)$

Άσκηση 1. *Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις.*

Αν $\mathscr{C}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω τότε ορίζουμε

$$\mathscr{C}' := f(\mathscr{C}) = \{C' \subset \Omega' : C' = f(C) \text{ για κάποιο } C \in \mathscr{C}\}.$$

Πρόταση 2. *Αν $\mathscr{F}'$ είναι ένα σ–πεδίο υποσυνόλων του Ω' τότε $\mathscr{F} = f^{-1}(\mathscr{F}')$ είναι ένα σ-πεδίο υποσυνόλων του Ω.*

Απόδειξη: Αφού $\Omega = f^{-1}(\Omega')$, $\Omega \in \mathscr{F}$. Έστω $A \in \mathscr{F}$ όπου $A = f^{-1}(A')$ όπου $A' \in \mathscr{F}'$. Τότε $A^c = (f^{-1}(A'))^c = f^{-1}(A'^c) \in \mathscr{F}$ (αφού $A'^c \in \mathscr{F}'$). Τέλος, έστω $A_i = f^{-1}(A_i')$, $i = 1, 2, \ldots$ στοιχεία του $\mathscr{F}$.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i') = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \in \mathscr{F}.$$

Η τελευταία σχέση οφείλεται στο γεγονός ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \in \mathscr{F}'$ αφού το $\mathscr{F}'$ είναι εξ' υποθέσεως σ-πεδίο. ∎

Πρόταση 3. *Αν $\mathscr{C}'$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω' και $\sigma(\mathscr{C}')$ το σ-πεδίο που γεννάται από αυτήν τότε $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$.*

Απόδειξη: Έστω $\mathscr{C} := f^{-1}(\mathscr{C}')$. Είναι προφανές ότι $\sigma(\mathscr{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$ αφού το τελευταίο είναι σ-πεδίο και περιέχει το $\mathscr{C}$. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη πρόταση ορίζουμε

$$\mathscr{F}' := \{B' \in \mathscr{P}(\Omega') : f^{-1}(B') \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))\}.$$

Το $\mathscr{F}'$ είναι σ-πεδίο αφού

(α) $\Omega' \in \mathscr{F}'$ δεδομένου ότι $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$.

(β) Αν $B' \in \mathscr{F}'$ τότε $B'^c \in \mathscr{F}'$ αφού $f^{-1}(B'^c) = (f^{-1}(B'))^c \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$.

(γ) Αν $B_i' \in \mathscr{F}'$ τότε $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i') = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i') \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$. Συνεπώς, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i' \in \mathscr{F}'$.

Εξ ορισμού ισχύει ότι $f^{-1}(\mathscr{F}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$. Επίσης $\mathscr{C}' \subset \mathscr{F}'$ αφού $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$. Αφού το $\mathscr{F}'$ είναι σ–πεδίο, $\sigma(\mathscr{C}') \subset \mathscr{F}'$ και συνεπώς, από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')) \subset f^{-1}(\mathscr{F}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')).$$

∎

Μετρήσιμος χώρος ονομάζεται ένα ζεύγος $(\Omega, \mathscr{F})$ όπου $\mathscr{F}$ είναι ένα σ–πεδίο υποσυνόλων του Ω.

Ορισμός 7. *Μια συνάρτηση $f : (\Omega, \mathscr{F}) \mapsto (\Omega', \mathscr{F}')$ ονομάζεται μετρήσιμη αν, για κάθε $B' \in \mathscr{F}'$, $f^{-1}(B') \in \mathscr{F}$.*

2.1.1 σ–πεδίο του Borel

Ορισμός 8. *Έστω $\mathbb{S}$ ένα μετρικός χώρος. Το σ–πεδίο υποσυνόλων του $\mathbb{S}$ που γεννιέται από τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{S}$ ονομάζεται σ–πεδίο του Borel και θα το συμβολίζουμε με $\mathscr{B}(\mathbb{S})$.*

Ιδιαίτερη σημασία για μας θα έχει η περίπτωση που ο μετρικος χώρος είναι η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ ή οι Ευκλίδειοι χώροι $\mathbb{R}^k$. Τα αντίστοιχα σ–πεδία του Borel θα συμβολίζονται με $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ και $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά το σ–πεδίο του Borel στην πραγματική ευθεία το οποίο από εδώ και εμπρός θα συμβολίζουμε απλά ως $\mathscr{B}$.

Πρόταση 4. *Στην πραγματική ευθεία το σ–πεδίο που γεννιέται από τα διαστήματα ταυτίζεται με το $\mathscr{B}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{C}$ το σύνολο όλων των διαστημάτων (ανοικτών, κλειστών, ημιανοικτών κλπ.) στην πραγματική ευθεία και $\sigma(\mathscr{C})$ το σ–πεδίο που γεννιέται από αυτά. Αφού τα διαστήματα είναι σύνολα Borel $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$. Ισχύει όμως και το αντίστροφο: Κάθε ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}$ μπορεί να εκφρασθεί ως αριθμήσιμη ένωση (ξένων μεταξύ τους) ανοικτών *διστημάτων*. Συνεπώς το $\sigma(\mathscr{C})$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ και επομένως, αφού είναι σ–πεδίο, και το σ–πεδίο που γεννιέται από αυτά, δηλαδή $\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{B}$. □

Θεώρημα 2. *Η συνάρτηση* f *είναι μερτήσιμη αν και μόνο αν,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *οποιαδήποτε από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες ισχύει:*

α)	$f^{-1}(a,\infty) \in \mathscr{F}$	*β)*	$f^{-1}[a,\infty) \in \mathscr{F}$
γ)	$f^{-1}(-\infty,a) \in \mathscr{F}$	*δ)*	$f^{-1}(-\infty,a] \in \mathscr{F}$
ε)	$f^{-1}(a,b) \in \mathscr{F}$	*ς)*	$f^{-1}[a,b] \in \mathscr{F}$
ζ)	$f^{-1}(a,b] \in \mathscr{F}$	*η)*	$f^{-1}[a,b) \in \mathscr{F}$

Άσκηση 2. *Αποδείξτε το παραπάνω θεώρημα.*

Θεώρημα 3. *Έστω* f, g, *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $c \in \mathbb{R}$. *Τότε οι συναρτήσεις* $f+g$, cf, f^2 *και* fg *είναι επίσης μετρήσιμες.*

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ $A = \{(x,y) : x+y < a\}$ γράφεται ως $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ όπου $R_n = \{(x,y) : x < r_n, y < a - r_n\}$ και $r_n \in \mathbb{Q}$ για κάποια ακολουθία ρητών αριθμών. Ασφαλώς είναι προφανές ότι $B \subset A$. Για να πεισθούμε για το αντίστροφο διαλέγουμε $(x,y) \in A$. Τότε $x+y < a$ και συνεπώς $x < a-y$. Επομένως υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός, έστω r_n, ανάμεσα σάυτούς τους δύο πραγματικούς αριθμούς. Συνεπώς

$$x < r_n < a - y \tag{2.1}$$

ή $x < r_n$ και $y < a - r_n$. Το επιχείρημα συμπληρώνεται με την παρατήρηση ότι, αφού όλοι οι ρητοί είναι αριθμήσιμοι και οι ρητοί που ικανοποιούν την (2.1) θα είναι αριθμήσιμοι.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε επομένως ότι

$$\begin{aligned}(f+g)^{-1}(-\infty,a) &= \{\omega : f(\omega)+g(\omega) < a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : f(\omega) < r_n\} \cap \{\omega : g(\omega) < a - r_n\} \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη ότι η $f+g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Για να αποδείξουμε ότι η cf είναι μετρήσιμη απλά παρατηρούμε ότι $(cf)^{-1}(a,\infty) = f^{-1}(ac^{-1},\infty)$ υπό την προϋπόθεση ότι $c > 0$. (Αν $c < 0$ τότε προκύπτει η αντίστροφη εικόνα του $(-\infty, c^{-1}a)$ ενώ αν $c = 0$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση που προκύπτει είναι μετρήσιμη.)

Έστω τώρα $h = f^2$ και $a > 0$. Τότε $h^{-1}(a,\infty) = f^{-1}(\sqrt{a},\infty) \cup f^{-1}(-\infty,-\sqrt{a}) \in \mathscr{F}$. Αφ' ετέρου, αν $a \leq 0$ τότε $h^{-1}(a,\infty) = \Omega \in \mathscr{F}$. Επομένως η f^2 είναι μετρήσιμη συνάρτηση. ∎

2.2 Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 9. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ χώρος πιθανοτήτων. Ονομάζουμε πραγματική τυχαία μεταβλητή κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$.*

Ο ορισμός αυτός απαιτεί, για κάθε $B \in \mathscr{B}$ να ισχύει

$$X^{-1}(B) \in \mathscr{F}. \tag{2.2}$$

Με βάση το θεώρημα 2 για να ισχύει η (2.2) αρκεί, για παράδειγμα να ισχύει ότι

$$X^{-1}(-\infty, a] \in \mathscr{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

δηλαδή να ισχύει ότι

$$\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathscr{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Αν η X είναι πραγματική τυχαία μεταβλητή, η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

ονομάζεται *συνάρτηση κατανομής* της X. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η F είναι αύξουσα (δηλαδή $x_1 < x_2$ συνεπάγεται $F(x_1) \leq F(x_2)$) και επιπλέον $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Άσκηση 3. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση κατανομής είναι συνεχής από τα δεξιά. Επίσης αποδείξτε ότι μπορεί να έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.*

Η σχέση

$$\mu(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B), \quad B \in \mathscr{B} \tag{2.6}$$

ορίζει ένα μέτρο μ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ισχύει η αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν $\{B_i\}$ είναι μια ακολουθία από σύνολα Borel του $\mathbb{R}$, ξένα μεταξύ τους, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \tag{2.7}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)$ η οποία ισχύει εφ' όσον τα $\{B_i\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Παρατηρείστε ότι $\mu(-\infty, a] = F(a)$ και, αν $a < b$, $(-\infty b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, συνεπώς $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$.

Η διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, βάσει της οποίας μια τυχαία πραγματική τυχαία μεταβλητή ορίζει μια συνάρτηση κατανομής και ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ μπορεί να αντιστραφεί. Δεδομένης μιας συνάρτησης κατανομής F ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ ως εξής: Θέτουμε $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, $\mu(a, b) = F(b-) - F(a)$ (όπου $F(b-) = \lim_{x \uparrow b} F(x)$, $\mu[a, b) = F(b-) - F(a-)$ και $\mu[a, b] = F(b) - F(a-)$. Επίσης, αν I_i, $i = 1, \ldots, n$ είναι *διαστήματα*, ξένα μεταξύ τους, θέτουμε $\mu(\cup_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $\{I_i\}$, είναι μια ακολουθία από ξένα μεταξύ τους διαστήματα τέτοια ώστε $\cup_{i=1}^{\infty} I_i$ να είναι πάλι *διάστημα* ισχύει ότι $\mu(I) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)$. (Η απόδειξη αυτής της πρότασης δεν είναι απλή. Χρειάζεται ένα επιχείρημα συμπάγειας, τυπικά το θεώρημα Heine-Borel.) Αν θεωρήσουμε αυτή την πρόταση δεδομένη όμως, με λίγη σκέψη συνειδητοποιούμε ότι έχουμε ορίσει το μ ως ένα αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο στο πεδίο που αποτελείται από πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων. Η επέκταση στο σ-πεδίο που γεννιέται από αυτό το πεδίο, δηλαδή στο $\mathscr{B}$, είναι πλέον αυτόματη από το θεώρημα Καραθεοδωρή.

Με τον τρόπο αυτό, δεδομένης μιας συνάρτησης κατανομής, F, κατασκευάζουμε τον χώρο πιθανοτήτων $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mu)$. Η ταυτοτική συνάρτηση $I(x) = x$ είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F.

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές είναι μετρήσιμες συναρτήσεις $(\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ επαναλαμβάνοντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του θεωρήματος 3 μπορούμε να αποδείξουμε την εξής πρόταση: Αν X, Y, είναι τυχαίες μεταβλητές τότε και οι $X+Y$, $X-Y$, XY είναι τυχαίες μεταβλητές. Ισχύει επίσης ότι η $\min(X, Y)$ είναι τυχαία μεταβλητή: Πράγματι, $\{\omega : \min(X(\omega), Y(\omega)) \le a\} = \{\omega : X(\omega) \le a\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le a\} \in \mathscr{F}$ (Αφού τα δύο σύνολα ανήκουν στο $\mathscr{F}$, δεδομένου ότι η X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές, και η τομή τους ανήκει στο $\mathscr{F}$.)

Άσκηση 4. *Έστω $\{X_n\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Δείξτε ότι τα σύνολα $\{\omega : \limsup_n X_n(\omega) \le x\}$ και $\{\omega : \liminf_n X_n(\omega) \le x\}$ είναι ενδεχόμενα, δηλαδή ανήκουν στο $\mathscr{F}$. Αν η ακολουθία $\{X_n\}$ συγκλίνει για κάθε ω δείξτε ότι το όριο $Z = \lim_{n\to\infty} X_n$ είναι τυχαία μεταβλητή.*

Άσκηση 5. *Έστω X, Y, τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι το σύνολο $\{Q = U\}$ είναι ενδεχόμενο.*

2.3 Ανεξαρτησία

Ορισμός 10. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ χώρος πιθανοτήτων και $\{A_t; t \in T\}$ μια οικογένεια από ενδεχόμενα (δηλαδή $A_t \in \mathscr{F}$ για κάθε $t \in T$). Το T είναι ένα σύνολο δεικτών που μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμο, ή και μη αριθμήσιμο. Τα ενδοχόμενα $\{A_t\}$ θα ονομάζονται* ανεξάρτητα *αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t_1, \ldots, t_n \in T$ ισχύει ότι*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{t_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{t_i}).$$

Όμοια, δύο σ–πεδία υποσυνόλων του Ω, $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$, τέτοια ώστε $\mathscr{T} \subset \mathscr{F}$, $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$, θα ονομάζονται ανεξάρτητα αν $\forall A \in \mathscr{T}$, $B \in \mathscr{S}$, ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Δύο πραγματικές τυχαίες μεταβλητές X, Y, ορισμένες στο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ θα ονομάζονται ανεξάρτητες αν $\forall B \in \mathscr{B}$, τα ενδεχόμεντα $X^{-1}(B)$, $U^{-1}(B)$ είναι ανεξάρτητα δηλαδή αν

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})\, P(\{Y \in B\}), \qquad A, B \in \mathscr{B}. \tag{2.8}$$

Ισοδύναμα, οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα σ–πεδία $X^{-1}(\mathscr{B})$, $Y^{-1}(\mathscr{B})$ είναι ανεξάρτητα.

Θεώρημα 4. *Δύο τυχαίες μεταβλητές,* X, Y*, είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η από κοινού κατανομή τους είναι το γινόμενο των περιθωρίων κατανομών, δηλαδή αν*

$$P(\{\omega : X(\omega) \le x\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : X(\omega) \le x\})\, P(\{\omega : Y(\omega) \le y\}) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση του θεωρήματος είναι προφανής από τον ορισμό της ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών αφού τα σύνολα $(-\infty, t]$, είναι Borel για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και επομένως $\{\omega : X(\omega) \le x\} = X^{-1}(-\infty, x]$, $\{\omega : Y(\omega) \le y\} = Y^{-1}(-\infty, y]$. Για να αποδείξουμε την άλλη κατεύθυνση θεωρούμε $y \in \mathbb{R}$ σταθερό και τέτοιο ώστε $P(Y \le t) > 0$ (πάντα υπάρχει τέτοιο y) και ορίζουμε το μέτρο Q_1 στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$Q_1(B) = \frac{P(X \in B, Y \le t)}{P(Y \le t)} \qquad \forall B \in \mathscr{B}.$$

Το μέτρο Q_1 συμφωνεί με το μέτρο P_X που ορίζεται ως $P_X(B) := P(X \in B)$ για κάθε σύνολο της μορφής $(-\infty, x]$ και συνεπώς, λόγω του θεωρήματος επέκτασης τα δύο μέτρα ταυτίζονται. Στη συνέχεια, για κάθε $B \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $P(X \in B) > 0$, ορίζουμε το μέτρο Q_B στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ μέσω της σχέσης

$$Q_B(A) = \frac{P(X \in B, Y \in A)}{P(X \in B)} \qquad \forall A \in \mathscr{B}.$$

Για κάθε σύνολο A της μορφής $(-\infty, y]$ από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$Q_B(-\infty, y] = \frac{P(X \in B, Y \le y)}{P(X \in B)} = \frac{Q_1(B) P(Y \le t)}{P(X \in B)} = P(Y \le t). \tag{2.9}$$

Στην παραπάνω σχέση η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονος ότι τα μέτρα Q_1 και P_X, όπως αποδείξαμε ταυτίζονται. Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα μέτρα Q_B και P_Y συμφωνούν σε όλα τα διστήματα της μορφής $(-\infty, y]$ και αφού αυτά τα διαστήματα γεννούν το $\mathscr{B}$, από το θεώρημα επέκτασης, θα πρέπει να συμφωνούν και στο $\mathscr{B}$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $A \in \mathscr{B}$, $Q_B(A) = P(Y \in A)$, και χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μαζί με τον ορισμό (2.9) παίρνουμε ότι $P(X \in B, Y \in A) = P(X \in B)\, P(X \in A)$. Αυτό σημαίνει ότι οι X, Y, είναι ανεξάρτητες. □

2.4 Τα Λήμματα Borel–Cantelli

Οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι γνωστές ως το πρώτο και δεύτερο λήμμα των Borel και Cantelli και, ειδικά το πρώτο, είναι εξαιρετικά σημαντικά τεχνικά εργαλεία στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Θεώρημα 5. *(Borel–Cantelli 1) Έστω* $\{A_n\}$ *μια ακολουθία από ενδεχόμενα στο* $\mathscr{F}$*. Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \tag{2.10}$$

τότε

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0. \tag{2.11}$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \le m$ ισχύει ότι

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{m} P(A_k) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \tag{2.12}$$

και, δεδομένου ότι $\bigcup_{k=n}^{m} A_k \uparrow \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ όταν $m \to \infty$, από την μονοτονική συνέχεια του μέτρου πιθανότητας έχουμε $\lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k) = P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$. Συνεπώς, αφήνοντας το m να πάει στο άπειρο στην ανισότητα (2.12) έχουμε

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

και

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

□

Το δεύτερο λήμμα αποτελεί το αντίστροφο του πρώτου, παρατηρείστε όμως ότι υποθέτει την ανεξαρτησία των ενδεχομένων A_n:

Θεώρημα 6. *(Borel-Cantelli 2) Έστω $\{A_n\}$ μια ακολουθία από* ανεξάρτητα *ενδεχόμενα στο $\mathscr{F}$. Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \tag{2.13}$$

τότε

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1. \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Από τους νόμους του de Morgan και την ανεξαρτησία των A_k (που συνεπάγεται την ανεξαρτησία των A_k^C) έχουμε $P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^C\right) = 1 - \prod_{k=n}^{m}(1 - P(A_k))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την ανισότητα $1 - x \le e^{-x}$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \ge 1 - e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} \tag{2.15}$$

Συνεπώς

$$1 \ge P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \ge 1 - e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$$

και επομένως έχουμε

$$1 \ge \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \ge 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$$

□

Παράδειγμα: Έστω $\{X_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέσο μονάδα, δηλαδή $P(X_n > x) = e^{-x}$. Έστω $\{a_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, για παράδειγμα $a_n = \alpha \log n$ όπου $\alpha > 0$. Τα ενδεχόμενα $A_n = \{X_n > a_n\}$ έχουν πιθανότητες $P(A_n) = P(X_n > a_n) = e^{-\alpha \log n} = n^{-\alpha}$. Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} < \infty & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ = \infty & \text{αν} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, όταν $\alpha > 1$, από το πρώτο Λήμμα Borel–Cantelli, μόνο πεπερασμένο πλήθος από τα ενδεχόμενα A_n συμβαίνουν, ενώ όταν $\alpha \leq 1$ από το δεύτερο Λήμα Borel–Cantelli και την ανεξαρτησία των A_n, άπειρο πλήθος από τα A_n συμβαίνουν.

Κεφάλαιο 3

Έννοιες σύγκλισης ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών

Θεωρούμε δεδομένο ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ πάνω στον οποίο είναι ορισμένη μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές, (X_n), $n = 1, 2, \ldots$, όπου $X_n : (\Omega, \mathscr{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Η έννοια της σύγκλιση μιας τέτοιας ακολουθίας πρέπει να εξεταστεί υπό το πρίσμα της σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων. Αν η ακολουθία συγκλίνει το όριο θα είναι τυχαία μεταβλητή $X : (\Omega, \mathscr{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

3.1 Σύγκλιση κατά πιθανότητα

Ορισμός 11. *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (X_n) συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X αν, για κάθε $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0. \tag{3.1}$$

Θα συμβολίζουμε την σύγκλιση κατά πιθανότητα ως $X_n \xrightarrow{P} X$.

Ο παραπάνω ορισμός γράφεται και ως εξής: Για κάθε $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$ υπάρχει n_0 που εξαρτάται από το ϵ και το δ τέτοιο ώστε, αν $n \geq n_0$ τότε $P\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) < \delta$.

Αν $X_n \xrightarrow{P} X$ και $X_n \xrightarrow{P} X'$ τότε $P(\{\omega : X(\omega) = X'(\omega)\}) = 1$, δηλαδή αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει κατά πιθανότητα τότε το όριο είναι ουσιαστικά μοναδικό. Πράγματι, από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\omega : |X(\omega) - X'(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\} \supset \left\{\omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| \leq \frac{1}{2k}\right\} \cap \left\{\omega : |X'(\omega) - X_n(\omega)| \leq \frac{1}{2k}\right\}$$

ή, παίρνοντας συμπληρώματα,

$$\left\{\omega : |X(\omega) - X'(\omega)| > \frac{1}{k}\right\} \subset \left\{\omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| > \frac{1}{2k}\right\} \cup \left\{\omega : |X'(\omega) - X_n(\omega)| > \frac{1}{2k}\right\}.$$

Ας θέσουμε $A_k = \{|X - X'| \geq \frac{1}{k}\}$, $B_{k,n} = \{|X - X_n| \geq \frac{1}{2k}\}$, $C_{k,n} = \{|X' - X_n| \geq \frac{1}{2k}\}$. Παρατηρείστε ότι $A_k \subset A_{k+1}$ και, για κάθε n, $B_{k,n} \subset B_{k+1,n}$ και $C_{k,n} \subset C_{k+1,n}$. Επίσης

$$A_k \subset B_{k,n} \cup C_{k,n}.$$

$$\left\{|X - X'| > 0\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|X - X'| \geq \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Συνεπώς $\{|X-X'| > 0\} \subset A_k \subset B_{k,n} \cup C_{k,n}$ και επομένως $P(|X-X'| > 0) \leq P(|X-X_n| \geq \frac{1}{2k}) + P(|X' - X_n| \geq \frac{1}{2k})$. Αλλά, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n τέτοιο ώστε $P(|X - X_n| \geq \frac{1}{2k}) < \epsilon/2$ και $P(|X - X_n| \geq \frac{1}{2k}) < \epsilon/2$. Άρα $P(|X - X'| > 0) < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$ συγλίνει κατά πιθανότητα υπό την έννοια του Cauchy αν, για κάθε $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ υπάρχει $n_0(\epsilon, \delta)$ τέτοιο ώστε

$$P\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \epsilon\}\right) < \delta \qquad \forall n, m \geq n_0.$$

3.2 Σύγκλιση με πιθανότητα 1

Ορισμός 12. *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (X_n) συγκλίνει με πιθανότητα 1 στην τυχαία μεταβλητή X αν, για κάθε $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0. \tag{3.2}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε ω (εκτός ενδεχομένως από αυτά που ανήκουν σε ένα σύνολο που έχει πιθανότητα 0) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται από το ϵ και το ω) τέτοιο ώστε, *για κάθε* $k \geq n_0$ $|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon$. Επομένως το σύνολο των ω για τα οποία η $\{X_n(\omega)\}$ συγλίνει στην $X(\omega)$ μπορεί να περιγραφεί με αριθμήσιμες ενώσεις και τομές ως εξής.

για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει n τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq n$ $|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{r}$

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \qquad \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{r}\}$$

Από την παραπάνω έκφραση συμπεραίνουμε ότι το σύνολο στο οποίο η $\{X_n\}$ συγκλίνει είναι πράγματι ενδεχόμενο (δηλαδή ανήκει στο $\mathscr{F}$). Για να έχουμε σύγκλιση με πιθανότητα 1 θα πρέπει το συμπλήρωμα αυτού του ενδεχομένου να έχει πιθανότητα 0, δηλαδή θα πρέπει

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\right) = 0$$

όπου

$$A_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k - X| > \frac{1}{r}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A_r \subset A_{r+1}$ για κάθε r, δηλαδή τα A_r είναι μια αύξουσα ακολουθία από σύνολα, και επομένως θα πρέπει

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\right) = \lim_{r\to\infty} P(A_r) = 0$$

Δεδομένου όμως ότι $P(A_r) \le P(A_{r+1}$ η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι $P(A_r) = 0$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$A_{r,n} := \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|X_k - X| > \frac{1}{r}\right\}$$

και έχουμε προφανώς ότι $A_{r,n+1} \subset A_{r,n}$. Άρα

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_{r,n}) = \lim_{n\to\infty} P(A_{r,n}) = 0.$$

Συνεπώς μια ισοδύναμη συνθήκη για να συγκλίνει η ακολουθία $\{X_n\}$ στην X με πιθανότητα 1 είναι η

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \epsilon\}\right) = 0 \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0. \tag{3.3}$$

Κεφάλαιο 4

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής

Ο ορισμός της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής θα γίνει σε τρία στάδια. Στο πρώτο θα ορίσουμε την μέση τιμή για απλές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή για εκείνες που παίρνουν πεπερασμένο πλήθος από διαφορετικές τιμές, στο δεύτερο θα επεκτείνουμε τον ορισμό για όλες τις τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν μόνο θετικές τιμές, ενώ στο τρίτο για γενικές τυχαίες μεταβλητές.

4.1 Μέση τιμή απλών τυχαίων μεταβλητών

Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Η τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται *απλή* αν παίρνει μόνο πεπερασμένο πλήθος διακριτών τιμών, έστω $a_1, \ldots, a_n$. Αν $A_i = \{\omega : X(\omega) = a_i\}$ τότε έχουμε την αναπαράσταση $X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ όπου $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ είναι μια διαμέριση του Ω δηλαδή $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Η δείκτρια $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ είναι μια απλή τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο δύο τιμές, 0 και 1:

$$\mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad \omega \in A_i \\ 0 & \text{αν} \quad \omega \notin A_i \end{cases}$$

Η μέση τιμή μιας απλής τυχαίας μεταβλητής *ορίζεται* ως εξής:

$$EX := \sum_{i=1}^n a_i P(A_i). \tag{4.1}$$

Γραμμικότητα της μέσης τιμής. Αν X, Y, απλές τυχαίες μεταβλητές και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε η $Z = \lambda X + \mu Y$ είναι απλή τυχαία μεταβλητή και $E[\lambda X + \mu Y] = \lambda EX + \mu EY$.

Πράγματι, αν $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{B_j}$, όπου τα $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ είναι διαμερίσεις του Ω τότε τα σύνολα $A_i \cap B_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ είναι μια πεπερασμένη διαμέριση του Ω και $Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda a_i + \mu b_j) \mathbf{1}_{A_i B_j}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} EZ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda a_i + \mu b_j) P(A_i B_j) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m P(A_i B_j) + \mu \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n P(A_i B_j) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_i P(A_i) + \mu \sum_{j=1}^m b_j P(B_j) = \lambda EX + \mu EY \end{aligned}$$

Μονοτονικότητα της μέσης τιμής. Αν X, Y είναι απλές τυχαίες μεταβλητές και $X(\omega) \geq Y(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ τότε $EX \geq EY$.

Έστω $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j}$. Κατασκευάζουμε μια κοινή διαμέριση, έστω $\{A_i \cap B_j\}$ και χρησιμοποιώντας μια καινούργια απαρίθμηση μπορούμε να γράψουμε $X = \sum_{k=1}^N u_k \mathbf{1}_{C_k}$, $Y = \sum_{k=1}^N v_k \mathbf{1}_{C_k}$, όπου $N = mn$ και $u_k \geq v_k$ λόγω της υπόθεσης ότι $X \geq Y$. (Παρατηρείστε επίσης ότι, $k \neq l$ δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά $u_k \neq u_l$, $v_k \neq v_l$.) Συνεπώς

$$EX = \sum_{k=1}^N u_k P(C_k) \geq \sum_{k=1}^N v_k P(C_k) = EY.$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $-|X| \leq X \leq |X|$. Συνεπώς αν η X είναι απλή τυχαία μεταβλητή τότε, λόγω της μονοτονικότητας, $-E|X| \leq EX \leq E|X|$ και συνεπώς

$$|EX| \leq E|X|.$$

Τέλος, αν οι απλές τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες, $EXY = EXEY$. Πράγματι, η τυχαία μεταβλητή $Z = XY$ είναι απλή και $Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{1}_{A_i B_j}$ (με τις X, Y, όπως πριν). Συνεπώς

$$\begin{aligned} EZ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j P(A_i B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j P(A_i) P(B_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i P(A_i) \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j P(B_j) \right) \\ &= EXEY \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X, Y, που συνεπάγεται ότι $P(A_i B_j) = P(A_i)P(B_j)$.

4.2 Μέση τιμή για γενικές μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές

Στην παράγραφο αυτή θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μέσης τιμής για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Ορισμός 13. *Έστω X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Η μέση τιμή της X ορίζεται ως*

$$EX := \sup\{EY : Y \text{ απλή }, Y \leq X\}. \tag{4.2}$$

Παρατηρούμε από τον παραπάνω ορισμό ότι δεν αποκλείεται το supremum του συνόλου που ορίζει την μέση τιμή να είναι άπειρο. Προκειμένου ο παραπάνω ορισμός να αποτελεί επέκταση του ορισμού της μέσης τιμής που δώσαμε για απλές τυχαίες μεταβλητές, θα πρέπει οι δύο ορισμοί να συμφωνούν στην περίπτωση που η X είναι απλή. Πράγματι, έστω ότι η X είναι απλή, ας θέσουμε $\alpha = \sup\{EY : \text{ απλή, } Y \leq X\}$ και ας συμφωνήσουμε ότι EX είναι η μέση τιμή της X όπως ορίζεται για *απλές* τυχαίες μεταβλητές. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\alpha = EX$. Δεδομένου ότι η X είναι απλή και $X \leq X$, $EX \in \{EY : \text{ απλή, } Y \leq X\}$ και επομένως $\alpha \geq EX$. Όμως, λόγω της μονοτονικότητας της μέσης τιμής για απλές τυχαίες μεταβλητές, για κάθε $Y \leq X$ ισχύει ότι $EY \leq EX$ και συνεπώς $\alpha = \sup\{EY : \text{ απλή, } Y \leq X\} \leq EX$. Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι $\alpha = EX$.

Μονοτονικότητα της μέσης τιμής. Αν X_1, X_2 είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές και $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ τότε $EX_1 \leq EX_2$.

Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι εύκολη. Αν η Y είναι απλή και $Y \leq X_1$ τότε $Y \leq X_2$ και συνεπώς $\{EY : \text{ απλή } , Y \leq X_1\} \subset \{EY : \text{ απλή } , Y \leq X_2\}$ το οποίο συνεπάγεται $EX_1 \leq EX_2$.

Θεώρημα 7. *Έστω* X μη αρνητική *τυχαία μεταβλητή.* $X = 0$ *με πιθανότητα 1 αν και μόνο αν* $EX = 0$.

Απόδειξη. Αν $X = 0$ μ.π. 1 τότε, αν η Y είναι απλή τυχαία μεταβλητή με $0 \leq Y \leq X$, υποχρεωτικά θα ισχύει $Y = 0$ με πιθανότητα 1 αφού $\{Y > 0\} \subset \{X > 0\}$ και $P(X > 0) = 0$. Αντίστροφα, έστω $EX = 0$ και $A = \{\omega : X(\omega) > 0\}$. Αν $A_n := \{\omega : X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$ τότε $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Η τυχαία μεταβλητή $Y_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n}$ είναι απλή και $Y_n \leq X$, συνεπώς

$$EX \geq EY_n = \frac{1}{n}P(A_n).$$

Αφού $EX = 0$, αυτό συνεπάγεται $P(A_n) = 0$ και $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. $\square$

Άσκηση 6. *Αν* $X \leq Y$ *με πιθανότητα 1 να δείξετε ότι* $EX \leq EY$.

Το επόμενο θεώρημα είναι θεμελιώδες.

Θεώρημα 8 (Θεώρημα Μονοτονικής Σύγκλισης). *Έστω* $\{X_n\}$ *ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$, *και* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. *Τότε η* X *είναι τυχαία μεταβλητή και* $\lim_{n\to\infty} EX_n = EX$. *Στην τελευταία αυτή εξίσωση δεχόμαστε ότι και τα δύο μέλη μπορεί να είναι* $+\infty$.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $\{X \leq x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n \leq x\}$, ισχύει ότι $\{X \leq x\} \in \mathscr{B}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η X είναι τυχαία μεταβλητή.

Λόγω της μονοτονικότητας της μέσης τιμής, η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{EX_n\}$ είναι αύξουσα και συνεπώς το όριο $\lim_n EX_n$ υπάρχει, μπορεί όμως να είναι άπειρο. Επίσης, αφού $X_n \leq X$, $EX_n \leq EX$ και συνεπώς

$$\lim_n EX_n \leq EX. \tag{4.3}$$

Αν $\lim_n EX_n = \infty$ τότε επίσης, από την (4.3), $EX = \infty$ και επομένως το θεώρημα ισχύει. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\lim_n EX_n < \infty$. Μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_n EX_n \geq EX. \tag{4.4}$$

Δεδομένου ότι $EX = \sup\{EY : Y \text{ απλή}, Y \leq X\}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_n EX_n \geq EY$ για κάθε απλή $Y = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i}$ τέτοια ώστε $Y \leq X$ όπου $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ είναι μια πεπερασμένη διαμέριση του Ω. Θα πρέπει βεβαίως να ισχύει $a_i \leq X(\omega)$ $\forall \omega \in A_i$. Έστω $\epsilon > 0$ και $A_{in} = \{\omega \in A_i : X_n(\omega) \geq a_i - \epsilon\}$. Για σταθερό i, $A_{in} \subset A_{i,n+1}$ και $A_{in} \uparrow A_i$ όταν $n \to \infty$. Ισχύει ότι $X_n \geq \sum_{i=1}^N (a_i - \epsilon)\mathbf{1}_{A_{in}}$ και συνεπώς

$$EX_n \geq \sum_{i=1}^N (a_i - \epsilon) P(A_{in})$$

και

$$\lim_{n\to\infty} EX_n \geq \sum_{i=1}^N (a_i - \epsilon) \lim_{n\to\infty} P(A_{in}) = \sum_{i=1}^N (a_i - \epsilon) P(A_i) = \sum_{i=1}^N a_i P(A_i) - \epsilon.$$

Αφήνοντας το ϵ να πάει στο μηδέν προκύπτει η (4.4). □

Συμβολίζουμε με $\lfloor x \rfloor$ τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 5. *Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{X_n\}$ από απλές τυχαίες μεταβλητές που τείνει στην X.*

Απόδειξη. Έστω $X_n := \Psi_n(X)$ όπου $\Psi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ η συνάρτηση $\Psi_n(x) = \min(n, 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor)$ για $x \geq 0$. Τότε $X_n \geq 0$ και $X_n \uparrow X$, όπου οι X_n είναι απλές τυχαίες μεταβλητές. Η σύγκλιση ισχύει για κάθε $\omega \in \Omega$. □

Η γραμμικότητα της μέσης τιμής για μη αρνητικές μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε την γραμμικότητα της μέσης τιμής για γενικές, μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Έστω X, Y, δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές και $a, b > 0$. Έστω $Z = aX + bY$ και $Z_n = a\Psi_n(X) + b\Psi_n(Y)$. Η ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών $\{Z_n\}$ είναι αύξουσα και $Z_n \uparrow Z$ συνεπώς από το θεώρημα μονοτονικής σύγκλισης ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} EZ_n = EZ = E[aX + bY]. \tag{4.5}$$

Επίσης, λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής *για απλές τυχαίες μεταβλητές*

$$EZ_n = E[a\Psi_n(X) + b\Psi_n(Y)] = aE\Psi_n(X) + bE\Psi_n(Y). \tag{4.6}$$

Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} EZ_n = a \lim_{n\to\infty} E\Psi_n(X) + b \lim_{n\to\infty} E\Psi_n(Y). \tag{4.7}$$

Όμως, λόγω του θεωρήματος της μονοτονικής σύγκλισης,

$$\lim_n E\Psi_n(X) = EX \quad \text{και} \quad \lim_n E\Psi_n(Y) = EY. \tag{4.8}$$

Από τις (4.6), (4.7) και (4.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} EZ_n = aEX + bEY. \tag{4.9}$$

Συγκρίνοντας τις (4.5) και (4.9) καταλήγουμε στην

$$E[aX + bY] = aEX + bEY. \tag{4.10}$$

Παρατηρείστε ότι αποδείξαμε την γραμμικότητα μόνο για θετικά a και b. Αυτό ήταν απαραίτητο για να είναι η ακολουθία $\{Z_n\}$ αύξουσα. Η απόδειξη της γραμμικότητας στην γενική περίπτωση θα συμπληρωθεί στην επόμενη παράγραφο.

4.3 Μέση τιμή για γενικές τυχαίες μεταβλητές

Έστω $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ πραγματική τυχαία μεταβλητή. Ορίζουμε δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, την $(\cdot)^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το *θετικό μέρος* του x, δηλαδή $x^+ = x$ αν $x \geq 0$ και $x^+ = 0$ αν $x < 0$, και την $(\cdot)^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το *αρνητικό μέρος* του x, δηλαδή $x^- = -x$ αν $x < 0$ και $x^- = 0$ αν $x \geq 0$. (Συνεπώς κάθε αριθμός γράφεται ως $x = x^+ - x^-$.) Ισχύει βεβαίως ότι $x^+ = \max(x, 0)$ και $x^- = -\min(x, 0) = \max(-x, 0)$. Συνεπώς είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας του θετικού και αρνητικού μέρους οι X^+ και X^- είναι τυχαίες μεταβλητές αφού είναι συναρτήσεις Borel μιας τυχαίας μεταβλητής. Είναι επίσης εξ' ορισμού και οι δύο μη αρνητικές. Συνεπώς οι μέσες τιμές EX^+ και EX^- ορίζονται με βάση την προηγούμενη παράγραφο. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 14. *Έστω X πραγματική τυχαία μεταβλητή. Αν $EX^+ < \infty$, $EX^- < \infty$ τότε ορίζουμε την μέση τιμή της X ως*

$$EX := EX^+ - EX^-.$$

Αν $EX^+ = \infty$, $EX^- < \infty$ τότε $EX := +\infty$. Αν $EX^+ < \infty$, $EX^- = \infty$ τότε $EX := -\infty$. Τέλος, αν $EX^+ = \infty$, $EX^- = \infty$, τότε η μέση τιμή της X δεν ορίζεται. Μια τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει $E|X| = EX^+ + EX^- < \infty$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη.

Γραμμικότης της μέσης τιμής. Είμαστε τώρα έτοιμοι να συμπληρώσουμε την απόδειξη της ιδιότητας της γραμμικότητας. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με $E|X| = EX^+ + EX^- < \infty$ και $E|Y| = EY^+ + EY- < \infty$. Τότε, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $E[aX + bY] = aEX + bEY$. (Η διατύπωση στην περίπτωση που οι μέσες τιμές των X και Y δεν είναι πεπερασμένες αφήνεται σαν άσκηση.) Πράγματι, ισχύει ότι $(aX + bY)^+ = a^+X^+ + a^-X^- + b^+Y^+ + b^-Y^-$ και $(aX + bY)^- = a^+X^- + a^-X^+ + b^+Y^- + b^-Y^+$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
E[aX + bY] &= E[a^+X^+ + a^-X^- + b^+Y^+ + b^-Y^-] - E[a^+X^- + a^-X^+ + b^+Y^- + b^-Y^+] \\
&= (a^+EX^+ - a^-EX^+) - (a^+EX^- - a^-EX^-) \\
&\quad +(b^+EY^+ - b^-EY^+) - (b^+EY^- - b^-EY^-) \\
&= aEX^+ - aEX^- + bEY^+ - bEY^- = aEX + bEY.
\end{aligned}$$

Πρόταση 6. *Αν* $X \le Y$ *για κάθε* $\omega \in \Omega$ *τότε* $EX \le EY$.

Απόδειξη. Αφού $X \le Y$ αυτό συνεπάγεται ότι $X^+ \le Y^+$ και $X^- \ge Y^-$. Ας υποθέσουμε ότι $EX^- < \infty$ και $EY^+ < \infty$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $EX^+ \le EY^+$ και $-EX^- \le -EY^-$ και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $EX = EX^+ - EX^- \le EY^+ - EY^- = EY$. Οι περιπτώσεις που μια από τις μέσες τιμές, ή και οι δύο, απειρίζονται εξετάζεται ανάλογα. (Βέβαια, δεδομένης της ανισότητας που ικανοποιούν οι X και Y δεν είναι όλες οι περιπτώσεις δυνατές.) □

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεώρημα της Μονοτονικής Σύγκλισης για γενικές τυχαίες μεταβλητές (όχι υποχρεωτικά θετικές).

Θεώρημα 9 (Θεώρημα Μονοτονικής Σύγκλισης). *Έστω* $\{X_n\}$ *ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε* $X_1 \le X_2 \le X_3 \cdots$, *και* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. *Τότε η* X *είναι τυχαία μεταβλητή και* $\lim_{n\to\infty} EX_n = EX$. *Στην τελευταία αυτή εξίσωση δεχόμαστε ότι και τα δύο μέλη μπορεί να είναι* $+\infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_n = X_n - X_1$. Θα ισχύει $Y_n \ge 0$ και $Y_{n+1} \ge Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς ισχύει η εκδοχή του Θεωρήματος Μονοτονικής Σύγκλισης για θετικές τυχαίες μεταβλητές που μας δίνει το αποτέλεσμα $\lim_n EY_n = E \lim_n Y_n$ ή $\lim_n EX_n - EX_1 = EX - EX_1$ υπό την προϋπόθεση ότι οι μέσες τιμές είναι πεπερασμένες. □

Άσκηση 7. *Να δείξετε ότι το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που οι ανισότητες* $X_n \le X_{n+1}$ *ισχύουν με πιθανότητα 1 και να διερευνήσετε την περίπτωση που η μέση τιμή* EX *δεν είναι πεπερασμένη.*

Τα ακόλουθα θεωρήματα είναι θεμελιώδη:

Θεώρημα 10 (Λήμμα του Fatou). *Αν* $X_n \ge C$ *για κάθε* n *και* $C \in \mathbb{R}$ *τότε*

$$E \liminf_{n\to\infty} X_n \le \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $Y_n = \inf_{k\ge n} X_k$ και $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$. Συνεπώς ισχύει ότι $Y_n \ge C$ και $Y_n \uparrow Y$. Επιπλέον, εξ ορισμού, $Y_n \le X_k$ για $k \ge n$. Συνεπώς, από την μονοτονικότητα της μέσης τιμής έχουμε $EY_n \le EX_k$ για $k \ge n$ ή

$$EY_n \le \inf_{k\ge n} EX_k.$$

Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} EY_n \le \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

Όμως, από το θεώρημα Μονοτονικής Σύγκλισης,

$$\lim_n EY_n = E \lim Y = \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Θεώρημα 11 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης). *Έστω $\{X_n\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $X_n \to X$ με πιθανότητα 1 και Y τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $|X_n| \le Y$ με πιθανότητα 1 και $E|Y| \le \infty$. Τότε, $\lim_n EX_n = EX$.*

Απόδειξη. Έχουμε $X_n + Y \ge 0$ με πιθανότητα 1. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το λήμμα του Fatou,

$$E[\liminf_n (X_n + Y)] \le \liminf_n (EX_n + EY) = EY + \liminf_n EX_n.$$

Όμως

$$E[\liminf_n (X_n + Y)] = EX + EY.$$

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές σχέσεις καταλήγουμε στην

$$EX \le \liminf_n EX_n. \tag{4.11}$$

Ισχύει όμως και ότι $Y - X_n \ge 0$ με πιθανότητα 1 και επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα έχουμε $E[\liminf_n (Y - X_n)] \le \liminf_n (EY - EX_n) = EY - \limsup_n EX_n$ από την οποία συνάγουμε, όπως και προηγουμένως ότι

$$EX \ge \limsup_n EX_n. \tag{4.12}$$

Από τις (4.11), (4.12), προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Θεώρημα 12. *(Beppo–Levi) Έστω $\{X_k\}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|X_k| < \infty. \tag{4.13}$$

Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ συγκλινει μ.π. 1, $E\,|\sum_{k=1}^{\infty} X_k| < \infty$, και

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_n = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία $\{Y_n\}$ είναι αύξουσα και συνεπώς το όριο $Y = \sum_{n=1}^{\infty} |X_k|$ υπάρχει για κάθε $\omega \in \Omega$, μπορεί όμως για κάποια ω να είναι $+\infty$. Από το θεώρημα μονοτονικής σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι $\lim_n EY_n = EY$ ή

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E|X_k| = E\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|.$$

Όμως το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης ισούται με $\sum_{k=1}^{\infty} E|X_k|$ και είναι εξ υποθέσεως πεπερασμένο. Άρα $E\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| < \infty$. Συνεπώς, αν $\Lambda = \{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)| = \infty\}$, τότε $P(\Lambda) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\omega \in \Lambda^C$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|$ συγκλίνει απολύτως, πράγμα που συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)$ $\forall \omega \in \Lambda^C$ με $P(\Lambda^C) = 1$. Μένει να δείξουμε την (4.14). Θεωρούμε την ακολουθία $Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Ισχύει ότι $|Z_n| \le \sum_{k=1}^{n} |X_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|$ και $E\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| = \sum_{k=1}^{\infty} E|X_k| < \infty$. Συνεπώς, από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $E\lim_n Z_n = \lim_n EZ_n$. Αλλά $\lim_n Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ και $\lim_n EZ_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} EX_k = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k$. □

Άσκηση 8. *Έστω* $\{\xi_k\}$ *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli με* $P(\xi_k = 1) = 1 - P(\xi_k = -1) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *όπου* $\{p_k\}$ *είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών στο* $[0, 1]$. *Δείξτε ότι η τυχαία σειρά,* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xi_k$ *συγκλίνει με πιθανότητα 1.*

Κεφάλαιο 5

Μέτρα Πιθανοτήτων σε χώρους γινομένου

Έστω $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mathsf{P}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathsf{P}_2)$ δύο χώροι πιθανοτήτων. Συχνά θέλουμε να ορίσουμε το γινόμενο των δύο χώρων, $\Omega_1 \times \Omega_2$ και το αντίστοιχο γινόμενο των μέτρων πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, αν ο χώρος $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mathsf{P}_1)$ περιγράφει την ρίψη ενός (πράσινου) ζαριού ενώ ο χώρος $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathsf{P}_2)$ την ρίψη ενός άλλου ζαριού (κόκκινου, ώστε να ξεχωρίζουν). Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Ω_1 θα ήταν το $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και, αν το ζάρι είναι τίμιο, το μέτρο πιθανότητας P_1 θα ικανοποιούσε την $\mathsf{P}_1(\{i\}) = 1/6$ για $i = 1, \ldots, 6$. Το σ–πεδίο $\mathscr{F}_1$ θα ήταν το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω_1. Το ίδιο θα ίσχυε και για το δεύτερο ζάρι και, προφανώς, η ρίψη των δύο ζαριών ταυτόχρονα θα μπορούσε να περιγραφεί από τον δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$. Θεωρώντας τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων ανεξάρτητα θα θέταμε $\mathsf{P}(\{(i, j)\}) = 1/36$ για $i, j = 1, \ldots, 6$. Το σ–πεδίο $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ θα είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\Omega_1 \times \Omega_2$ θα αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του $\Omega_1 \times \Omega_2$ (και επομένως θα έχει 2^{36} στοιχεία!). Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι ο συμβολισμός $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ δεν πρέπει να θεωρηθεί με την κυριολεκτική έννοια. Το σ–πεδίο αυτό περιέχει την οικογένεια $\mathscr{R} := \{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\}$ (που είναι η κυριολεκτική έννοια του $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$) αλλά και πολλά σύνολα επιπλέον. Για παράδειγμα το σύνολο $\{(2, 3), (3, 2)\}$ ανήκει στο $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ αλλά όχι στο $\mathscr{R}$. (Ένας εύκολος υπολογισμός μας δείχνει ότι το $\mathscr{R}$ περιέχει $2^6 \times 2^6 = 2^{12}$ σύνολα.)

Η παραπάνω συζήτηση δείχνει ότι η κατασκευή του μέτρου γινομένου (product measure) σε πεπερασμένους χώρους είναι απλή υπόθεση. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν οι χώροι έχουν μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την διαδικασία της κατασκευής του μέτρου γινομένου λεπτομερώς. Ο χώρος γινομένου είναι βέβαια ο $\Omega_1 \times \Omega_2$. Θα πρέπει στη συνέχεια 1) να ορίσουμε το σ–πεδίο $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$, 2) να ορίσουμε το μέτρο γινομένου ως $\mathsf{P}(A \times B) = \mathsf{P}_1(A)\mathsf{P}_2(B)$ για όλα τα σύνολα $A \in \mathscr{F}_1$, $B \in \mathscr{F}_2$ και 3) να επεκτείνουμε το μέτρο γινομένου σε όλα τα σύνολα του $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ και να δείξουμε ότι η επέκταση αυτή είναι μοναδική.

5.1 Το σ–πεδίο γινομένου

Ξεκινάμε με την κατασκευή του σ–πεδίου γινομένου.

Ορισμός 15. *Το σ–πεδίο γινομένου* $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *ορίζεται ως το σ–πεδίο που γεννιέται από την οικογένεια των «ορθογωνίων»* $\mathscr{R} := \{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\}$.

Ο ορισμός αυτός λύνει το πρόβλημα της κατασκευής, προκειμένου όμως να καταλάβουμε καλύτερα τη δομή του σ–πεδίου γινομένου και να μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε θα δώσουμε ένα επιπλέον χαρακτηρισμό. Έστω

$$\mathscr{C} := \{A_1 \times \Omega_2 : A_1 \in \mathscr{F}_1\} \cup \{\Omega_1 \times A_2 : A_2 \in \mathscr{F}_2\}$$

τα *κυλινδρικά σύνολα*. Το σ–πεδίο που γεννιέται από τα κυλινδρικά σύνολα ταυτίζεται με το $\sigma(\mathscr{R}) =: \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$. Προκειμένου να το δείξουμε ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι $\mathscr{C} \subset \mathscr{R}$ και συνεπώς $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{R})$. Ισχύει όμως και ότι $A_1 \times A_2 = A_1 \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times \Omega_2$ και επομένως κάθε στοιχείο του $\mathscr{R}$ γράφεται ως τομή δύο στοιχείων του $\mathscr{C}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathscr{R} \subset \sigma(\mathscr{C})$ και κατά συνέπεια ότι $\sigma(\mathscr{R}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

Ορισμός 16. *Αν* $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ *τότε, για κάθε* $\omega_1 \in \Omega_1$ *ορίζουμε την* ω_1*–τομή (section) του συνόλου* A *ως*

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Παρόμοια,

$$A_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Προφανώς $A_{\omega_1} \subset \Omega_2$ και $A_{\omega_2} \subset \Omega_1$.

Θεώρημα 13. *Αν* $A \in \mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *τότε* $A_{\omega_1} \in \mathscr{F}_2$ *και* $A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1$.

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : \forall \omega_2, A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathscr{G}$ είναι σ–πεδίο που περιέχει τα «ορθογώνια» $\mathscr{R}$. Αν $A = A_1 \times A_2 \in \mathscr{R}$ τότε

$$A_{\omega_2} = \begin{cases} A_1 & \text{αν} \quad \omega_2 \in A_2 \\ \emptyset & \text{αν} \quad \omega_2 \notin A_2 \end{cases}$$

Και στις δυο περιπτώσεις, $A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1$ και συνεπώς $\mathscr{R} \subset \mathscr{G}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το $\mathscr{G}$ είναι σ-πεδίο. Αν $A \in \mathscr{G}$ τότε $A \in \mathscr{F}$ και $A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1$. Συνεπώς $A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$. Επίσης $A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1 \Rightarrow A^c_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1$. Αλλά $A^c_{\omega_2} = \Omega_1 \setminus A_{\omega_2} = (\Omega \setminus A)_{\omega_2}$. Επομενως συμπεραίνουμε ότι $A \in \mathscr{G} \Rightarrow A^c \mathscr{G}$.

Τέλος, έστω $A_n \in \mathscr{G}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{\omega_2} &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_{\omega_2}. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\mathscr{G}$ είναι σ–πεδίο που περιέχει τα ορθογώνια και επομένως $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A_{\omega_2} \in \mathscr{F}_1$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A_{\omega_1} \in \mathscr{F}_2$. $\square$

5.2 Το θεώρημα της Μονοτονικής Κλάσης

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ένα θεώρημα το οποίο αποτελεί σημαντικό τεχνικό εργαλείο στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τεχνική και μπορεί να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση, ο ορισμός όμως της Μονοτονικής Κλάσης και το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι απλός και εύχρηστος.

Ορισμός 17. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathscr{G}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Η $\mathscr{G}$ θα ονομάζεται* Μονοτονική Κλάση *αν είναι κλειστή κάτω από αριθμήσιμες* μονοτονικές ενώσεις και τομές, *δηλαδή αν* $A_n \in \mathscr{G}$, $n = 1, 2, \ldots$, *και* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ *τότε* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{G}$ *και αν* $A_n \in \mathscr{G}$ *και* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *τότε* $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{G}$.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι η τομή οσωνδήποτε μονοτονικών κλάσεων είναι πάλι μονοτονική κλάση. Για να πεισθούμε γι' αυτό, έστω $\{\mathscr{G}_t : t \in T\}$ μια οικογένεια μονοτονικών κλάσεων στο Ω, όπου T είναι ένα σύνολο δεικτών, όχι υποχρεωτικά αριθμήσιμο. Έστω $\{A_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία συνόλων (δηλαδή $A_n \subset A_{n+1}$) που ανήκουν στην τομή $\bigcup_{t \in T} \mathscr{G}_t$. Τότε $\forall t \in T$ $A_n \in \mathscr{G}_t$, $n = 1, 2, \ldots$, και αφού η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα και η $\mathscr{G}_t$ μονοτονική κλάση, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{G}_t$ $\forall t \in T$. Συνεπώς $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \cup_{t \in T} \mathscr{G}_t$. Το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιούμε και για φθίνουσες τομές.

Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να ορίσουμε την μικρότερη μονοτονική κλάση που γεννιέται από μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, $\mathscr{A}$, ως την τομή όλων των μονοτονικών κλάσεων που περιέχουν την $\mathscr{A}$. Ο ορισμός αυτός έχει νόημα αφού το δυναμοσύνολο του Ω είναι μονοτονική κλάση και περιέχει την $\mathscr{A}$. Η μικρότερη μονοτονική κλάση που περιέχει την $\mathscr{A}$ ονομάζεται *μονοτονική κλάση που γεννιέται από την $\mathscr{A}$.*

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε σ–πεδίο είναι και μονότονη κλάση, το αντίθετο όμως δεν ισχύει υποχρεωτικά.

Θεώρημα 14. *Η Μονοτονική κλάση $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ που γεννιέται από ένα πεδίο $\mathscr{A}$ ταυτίζεται με το σ–πεδίο $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}$ που γεννιέται από το $\mathscr{A}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος, που είναι περίπλοκο είναι να αποδείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι πεδίο. Το δεύτερο μέρος ότι είναι σ–πεδίο. Ας ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η $\mathscr{G}$ είναι πεδίο. Αφού το $\mathscr{A}$ είναι πεδίο περιέχει το Ω και το ίδιο ισχύει και για την $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ που γεννιέται από το $\mathscr{A}$.

Θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι κλειστή κάτω από συμπληρώματα. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε την οικογένεια συνόλων $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}} := \{A \subset \Omega : A^c \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}\}$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathscr{G}_{\mathscr{A}} \subset \overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}. \tag{5.1}$$

Ισχύει οτι $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$ επειδή αν $A \in \mathscr{A}$ τότε και $A^c \in \mathscr{A}$. (Το $\mathscr{A}$ είναι πεδίο.) Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι μονοτονική κλάση. Έστω $\{A_n\}$ μια *αύξουσα* ακολουθία συνόλων του $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα A_n^c ανήκουν στο $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ και αποτελούν μια *φθίνουσα* ακολουθία. Αφού η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι μονοτονική κλάση, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ και από τους νόμους του de Morgan $\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ που σημαίνει ότι $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$ (από τον ορισμό της $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$). Ένα αντίστοιχο επιχείρημα δείχνει ότι η $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$ είναι κλειστή και κάτω από φθίνουσες τομές. Συνεπώς η $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$ είναι μονοτονική κλάση που περιέχει το $\mathscr{A}$ άρα περιέχει και την μονοτονική κλάση που γεννιέται από το $\mathscr{A}$, δηλαδή $\mathscr{G}_{\mathscr{A}} \subset \overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$, $A^c \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ (από τον ορισμό της $\overline{\mathscr{G}}_{\mathscr{A}}$!)

Θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι κλειστή κάτω από ενώσεις, δηλαδή ότι αν $A, B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ τότε και $A \cup B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε κάποιο $A \in \mathscr{A}$ και θεωρούμε την οικογένεια $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A} := \{B \subset \Omega : A \cup B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}\}$. Παρατηρούμε ότι $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$. Πράγματι, αν $B \in \mathscr{A}$ τότε και $A \cup B \in \mathscr{A} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$ είναι μονοτονική κλάση. Πράγματι αν $\{B_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία που ανήκει στην $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$ τότε, για κάθε n, $A \cup B_n \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Αφού ή $\{A \cup B_n\}$ είναι επίσης αύξουσα ακολουθία, $\cup_{n=1}^{\infty}(A \cup B_n) \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Αλλά $\cup_{n=1}^{\infty}(A \cup B_n) = A \cup (\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Συνεπώς $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$ και επομένως έχουμε δείξει ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$ είναι κλειστή κάτω από αύξουσες ενώσεις. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι είναι κλειστή και κάτω από φθίνουσες τομές και συνεπώς ότι είναι μονοτονική κλάση. Αφού περιέχει την $\mathscr{A}$ θα περιέχει και την μονοτονική κλάση που γεννιέται από την $\mathscr{A}$, δηλαδή θα έχουμε $\mathscr{G}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup A}$.

Έχουμε επομένως δείξει ότι αν $A \in \mathscr{A}$ και $B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ τότε $A \cup B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$.

Τώρα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $C \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ (το C δεν ανήκει υποχρεωτικά στο $\mathscr{A}$) και ορίζουμε την οικογένεια $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C} := \{B \subset \Omega : C \cup B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}\}$. Αν $B \in \mathscr{A}$ τότε $C \cup B \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ από το προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή έχουμε $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$ είναι μονοτονική κλάση: Έστω $\{B_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία συνόλων της $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$. Η $\{B_n \cup C\}$ είναι αύξουσα και κάθε σύνολό της ανήκει στην $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Συνεπώς $\cup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup C) \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Αλλά $\cup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup C) = \left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup C$ και επομένως $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$. Άρα η $\mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$ είναι κλειστή κάτω από αριθμήσιμες ενώσεις και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι είναι κλειστή και κάτω από αριθμήσιμες τομές. Συνεπώς είναι μονοτονική κλάση, πράγμα που σημαίνει οτι $\mathscr{G}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A} \cup C}$. Αυτή η τελευταία σχέση σημαίνει ότι, αν $B, C \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ τότε $B \cup C \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Άρα δείξαμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι πεδίο.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι σ–πεδίο. Το μόνο που χρειάζεται γι΄ αυτό είναι να δείξουμε ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι κλειστή κάτω από αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{A_n\}$ μια ακολουθία συνόλων της $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $\{B_n\}$ που ορίζεται ως $B_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Για κάθε n, $B_n \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ αφού έχουμε δείξει ότι η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι πεδίο. Η $\{B_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία και συνεπώς $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ (αφού η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι μονοτονική κλάση).

Το τελικό επιχείρημα είναι το εξής: Αφού η $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ είναι σ–πεδίο και περιέχει το $\mathscr{A}$ θα περιέχει και το σ–πεδίο που γεννιέται από το $\mathscr{A}$, δηλαδή $\mathscr{F}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{G}_{\mathscr{A}}$. Όμως κάθε σ–πεδίο είναι και μονότονη κλάση συνεπώς αφού το $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}$ είναι μονότονη κλάση και περιέχει το $\mathscr{A}$ θα περιέχει και τη μονότονη κλάση που γεννιέται από το $\mathscr{A}$, δηλαδή $\mathscr{G}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{F}_{\mathscr{A}}$. Επομένως θα πρέπει να ισχύει $\mathscr{G}_{\mathscr{A}} = \mathscr{F}_{\mathscr{A}}$. $\square$

5.3 Κατασκευή του Μέτρου Γινομένου

Είδαμε ότι για κάθε «ορθογώνιο» σύνολο A

$$\int_{\Omega_1} P_1(A_{\omega_2})P_2(d\omega_2) = \int_{\Omega_2} P_2(A_{\omega_1})P_1(d\omega_1). \tag{5.2}$$

Το επόμενο θεώρημα που δίνει την κατασκευή του μέτρου γινομένου επεκτείνει την ισχύ της παραπάνω σχέσης από τα ορθογώνια σύνολα σε όλα τα μετρήσιμα σύνολα ως προς το σ-πεδίο γινομένου.

Θεώρημα 15. *Αν $A \in \mathscr{F}$ τότε οι συναρτήσεις $\omega_2 \to P_1(A_{\omega_2})$ και $\omega_1 \to P_2(A_{\omega_1})$ είναι μετρήσιμες ως προς τα σ-πεδία $\mathscr{F}_2$ και $\mathscr{F}_1$ αντίστοιχα και ισχύει η (5.2).*

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{G}$ το σύνολο όλων των $A \in \mathscr{F}$ έτσι ώστε οι $\omega_2 \to P_1(A_{\omega_2})$ και $\omega_1 \to P_2(A_{\omega_1})$ είναι μετρήσιμες ως προς τα σ-πεδία $\mathscr{F}_2$ και $\mathscr{F}_1$ αντίστοιχα και ισχύει η (5.2). Ισχύει ότι $\mathscr{R} \subset \mathscr{G}$ (αφού η (5.2) ισχύει για ορθογώνια σύνολα). Θα δείξουμε λοιπόν ότι $\mathscr{A}$, το πεδίο που γεννιέται από το $\mathscr{R}$ είναι υποσύνολο το $\mathscr{G}$, και τέλος ότι η $\mathscr{G}$ είναι μονότονη κλάση.

Έστω $A = (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$, δηλαδή το A είναι ένωση δύο ξένων μεταξύ τους ορθογωνίων συνόλων. Αφού τα ορθογώνια έχουν κενή τομή θα πρέπει να ισχύει τουλάχιστον μια από τις σχέσεις $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ και $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι ισχύει η πρώτη. Τότε

$$A_{\omega_2} = \begin{cases} A_1 \cup B_1 & \text{αν} \quad \omega_2 \in A_2 \cap B_2 \\ A_1 & \text{αν} \quad \omega_2 \in A_2 \setminus B_2 \\ B_1 & \text{αν} \quad \omega_2 \in B_2 \setminus A_2 \\ \emptyset & \qquad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως, αφού $A_1 \cap B_1 = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} P_1(A_{\omega_2})P_2(d\omega_2) &= (P_1(A_1) + P_1(B_1))\, P_2(A_2 \cup B_2) + P_1(A_1)P_2(A_2 \setminus B_2) + P_1(B_1)P_2(B_2 \setminus A_2) \\ &= P_1(A_1)P_2(A_2) + P_1(B_1)P_2(B_2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Όμως

$$A_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & \text{αν} \quad \omega_1 \in A_1 \\ B_2 & \text{αν} \quad \omega_1 \in B_1 \\ \emptyset & \qquad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και κατά συνέπεια

$$\int_{\Omega_1} P_2(A_{\omega_1})P_1(d\omega_1) = P_1(A_1)P_2(A_2) + P_1(B_1)P_2(B_2). \tag{5.4}$$

Όταν έχουμε περισσότερα από δύο ορθογώνια η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη αλλά η βασική ιδέα είναι ίδια. Έχουμε να κάνουμε με την απλή τυχαία μεταβλητή $\omega_2 \to P_1(A_{\omega_2})$ και επομένως ο υπολογισμός της μέσης τιμής της είναι στοιχειώδης. Το ίδιο ισχύει και για την $\omega_1 \to P_2(A_{\omega_1})$.

Συνεπώς το σύνολο $\mathscr{G}$ είναι πεδίο. Μένει να δείξουμε ότι το $\mathscr{G}$ είναι επίσης και μονοτονική κλάση. Έστω $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ σύνολα που ανήκουν στην $\mathscr{G}$. Από τον ορισμό της $\mathscr{G}$ γνωρίζουμε ότι οι $\omega_2 \to P_1((A_i)_{\omega_2})$ και $\omega_1 \to P_2((A_i)_{\omega_1})$ είναι τυχαίες μεταβλητές (δηλ. μετρίσημες ως προς τα αντίστοιχα σ-πεδία). Αποτελούν επίσης αύξουσες ακολουθίες $i = 1, 2, \ldots$, αφού $A_i \subset A_{i+1}$ συνεπάγεται ότι $(A_i)_{\omega_1} \subset (A_{i+1})_{\omega_1}$ και, ομοίως, $(A_i)_{\omega_2} \subset (A_{i+1})_{\omega_2}$. Όταν $i \to \infty$,

$$P_1((A_i)_{\omega_2}) \to P_1\left(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i)_{\omega_2}\right) = P_1\left((\cup_{i=1}^{\infty}A_i)_{\omega_2}\right)$$

συνεπώς η συνάρτηση $\omega_2 \to P_1((\cup_{i=1}^{\infty}A_i)_{\omega_2})$ είναι μετρήσιμη. Το ίδιο ισχύει βεβαίως και για την δεύτερη συνάρτηση. Από τον ορισμό της $\mathscr{G}$ η (5.2) ισχύει για κάθε i και, από θεώρημα της Μονοτονικής Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι ισχύει και στο όριο $\lim_i A_i = \cup_{i=1}^{\infty}A_i$. Επομένως δείξαμε ότι αν μια αύξουσα ακολουθία συνόλων $\{A_i\}$ ανήκει στην $\mathscr{G}$ τότε και το όριό της $\cup_{i=1}^{\infty}$ ανήκει στην $\mathscr{G}$. Μένει να δείξουμε ότι, αν $A_1 \supset A_2 \supset$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathscr{G}$ τότε και το όριό της, $\cap_{i=1}^{\infty}A_i$ ανήκει στην $\mathscr{G}$ το οποίο γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. □

Θεώρημα 16. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}_1, P_1)$, $(\Omega, \mathscr{F}_2, P_2)$, χώροι πιθανότητας και $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$. Η συνάρτηση $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$P(A) = \int_{\Omega_2} P_1(A_{\omega_2})dP_2(\omega_2) \tag{5.5}$$

είναι αριθμήσιμα προσθετική και ορίζει το μέτρο γινομένου στον $(\Omega, \mathscr{F})$.

Απόδειξη. Έστω $\{A_n\}$ μια ακολουθία από ξένα μεταξύ τους στοιχεία του $\mathscr{F}$. Τα $\{(A_n)_{\omega_2}\}$ είναι επίσης ξένα μεταξύ τους και ισχύει ότι $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{\omega_2} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\omega_2}$, συνεπώς

$$P_1\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{\omega_2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1\left((A_n)_{\omega_2}\right). \tag{5.6}$$

Αν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, η (5.5) δίνει

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_1\left((A_n)_{\omega_2}\right) dP_2(\omega) && (5.7) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_2} P_1\left((A_n)_{\omega_2}\right) dP_2(\omega) && (5.8) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) && (5.9) \end{aligned}$$

όπου, στην (5.8) χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Beppo–Levi. □

Κεφάλαιο 6

Νόμοι μεγάλων αριθμών

Οι νόμοι των μεγάλων αριθμών είναι από τα πλέον θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων. Η πρώτη μαθηματική διατύπωση νόμου μεγάλων αριθμών οφείλεται στον Bernoulli ο οποίος και απέδειξε με συνδιαστικά επιχειρήματα ότι, αν η πιθανότητα επιτυχίας ενός πειράματος είναι $p \in [0,1]$ και το ίδιο πείραμα επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα επ' αόριστον, τότε το ποσοστό επιτυχιών προσεγγίζει το p όταν ο αριθμός των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο. Γενικότερα, αν $\{X_n\}$ είναι μια ακολουθία από *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές*, τότε ο αριθμητικός μέσος $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ τείνει στην μέση τιμή $EX_1 =: \mu$ όταν το $n \to \infty$. Όμως τα στοιχεία της ακολουθίας $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}$ είναι τυχαίες μεταβλητές και επομένως πρέπει να προσδιορίσουμε την έννοια υπό την οποία συγκλίνουν στην σταθερά μ. Αν εννοούμε την σύγκλιση κατά πιθανότητα τότε το αποτέλεσμα που παίρνουμε ονομάζεται *Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών* ενώ αν την εννοούμε με πιθανότητα 1 τότε το αποτέλεσμα είναι ο *Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών*. Οι δύο αυτοί νόμοι παρουσιάζονται στα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 17 (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών). *Έστω* (X_n) *μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέσο* μ *και διασπορά* $\sigma^2 < \infty$*. Τότε* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε ότι, για $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \epsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \epsilon) = 0$ και συνεπώς ότι η ακολουθία $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο μ. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ απλό στην διατύπωση και στην απόδειξή του. Όπως θα δούμε όμως κάτω από τις ίδιες υποθέσεις ισχύει το ακόλουθο ισχυρότερο

Θεώρημα 18 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών). *Έστω* (X_n) *μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέσο* μ *πεπερασμένο. Υποθέτουμε επίσης οτι και η τέταρτη ροπή είναι πεπερασμένη, δηλαδή* $EX_1^4 < \infty$*. Τότε* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mu$ *με πιθανότητα 1.*

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι η τέταρτη ροπή είναι πεπερασμένη δεν είναι απαραίτητη για την ισχύ του συμπεράσματος του θεωρήματος. Την κάνουμε επειδή διευκολύνει σημαντικά την απόδειξη.

Απόδειξη. Αφαιρώντας τον μέσο μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι τυχάιες μεταβλητές έχουν μέσο 0. Θέτουμε $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ και υπολογίζουμε την τέταρτη ροπή του S_n. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4 &= \sum_{i=1}^n X_i^4 + \sum_{1\le i<j\le n} X_i X_j^3 + X_i^3 X_j + \sum_{1\le i<j\le n} X_i^2 X_j^2 \\ &= + \sum_{1\le i<j<k\le n} X_i^2 X_j X_k + X_i X_j^2 X_k + X_i X_j X_k^2 + \sum_{1\le i<j<k<l\le n} X_i X_j X_k X_l\end{aligned}$$

Παίρνοντας μέση τιμή στα δύο μέλη της ανισότητας και παρατηρώντας ότι, λόγω ανεξαρτησίας $EX_iX_j^3 = EX_iEX_j^3 = 0$ και $EX_iX_jX_kX_l = EX_iEX_jEX_kEX_l = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4 &= \sum_{i=1}^n EX_i^4 + 6\sum_{1\le i<j\le n} EX_i^2 EX_j^2 \\ &= nEX_1^4 + 3n(n-1)(EX_1^2)^2. \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Chebychev έχουμε ότι

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > n\epsilon\right) \le \frac{E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4}{n^4\epsilon^4} \le \frac{nEX_1^4 + 3n(n-1)(EX_1^2)^2}{n^4\epsilon^4} \le \frac{C}{n^2\epsilon}.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Kolmogorov N.I. (1933). *Grundbegrieffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Αγγλική μετάφραση: *Foundations of Probability* Εκδόσεις Chelsea.

[2] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. 3rd edition, John Wiley.

[3] Capiński M. and E. Kopp. (1999). *Measure, Integral, and Probability*. Springer.

[4] Chung, K.L. (1977). *Introduction to Probability*, 2nd edition, Academic Press.

[5] Resnick, S.I. (1999). *A Probability Path*. Birkhäuser.

[6] Rosenthal, J.S. (2000). *A First Look at Rigorous Probability Theory*. World Scientific.