Κεφ. 9. Έλεγχοι σταθερότητας.

9.1 Ορισμοί και χρήσης ψευδομεταβλητών.

$$c_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \varepsilon_t.$$

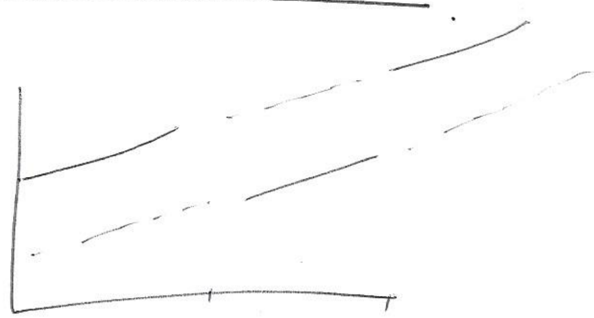
M_1: $c_t = \beta_1 + \delta d_t + \beta_2 y_t + \varepsilon_t.$

M_2: $c_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \delta \cdot (d_t y_t) + \varepsilon_t.$

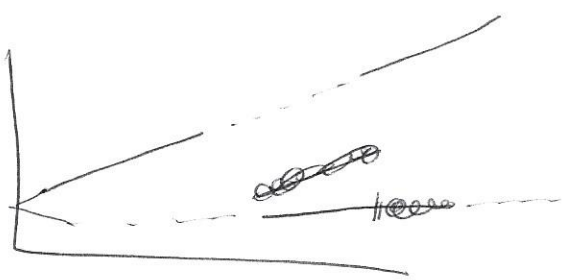
M_3: $c_t = \beta_1 + \delta_1 d_t + \beta_2 y_t + \delta_2 \cdot (d_t y_t) + \varepsilon_t$

- προβλήματα στη χρήση υποδειγμάτων με ψευδομεταβλητές.

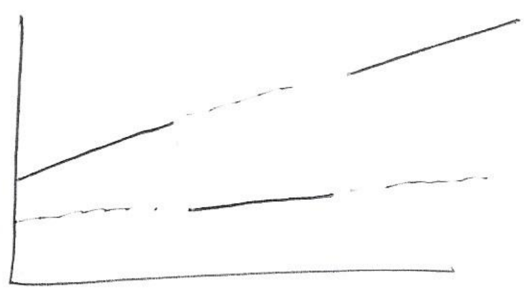
- ψευδομεταβλητές εποχικών επιδράσεων.



σταθερά



κλίση



σταθερά + κλίση

$\boxed{9.2}$ Στατιστικοί έλεγχοι σταθερότητας (ή αλλαγής).

Έλεγχος Chow

H_0: Δεν υπάρχουν αλλαγές στους συντελεστές του υποδείγματος μεταξύ των δειγμάτων T_1 και T_2 παρατηρήσεων.

$$y = XB + \varepsilon.$$

1) T_1 παρατηρήσεις: $\hat{B}_{T_1} = \left(X'_{T_1} X_{T_1}\right)^{-1} \cdot X'_{T_1} y_{T_1}$

2) Με βάση το $\hat{B}_{T_1}$ βρίσκω προβλέψεις για $t = T_1+1, T_1+2, \ldots, T$.

$$\hat{y}_{T_2} = X_{T_2} \cdot \hat{B}_{T_1}$$

3) διάνυσμα σφαλμάτων πρόβλεψης.

$$\left.\begin{aligned} d &= y_{T_2} - \hat{y}_{T_2} = y_{T_2} - X_{T_2} \cdot \hat{B}_{T_1} \\ &\text{όπου } \; y_{T_2} = X_{T_2} \cdot B + \varepsilon_{T_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = X_{T_2} \cdot B + \varepsilon_{T_2} - X_{T_2} \cdot \hat{B}_{T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \varepsilon_{T_2} - X_{T_2} \cdot \left(\hat{B}_{T_1} - B\right).$$

$$E(d) = E\left[\varepsilon_{T_2} - X_{T_2}\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)\right] = \underbrace{E\left(\varepsilon_{T_2}\right)}_{0} - E\left[X_{T_2}\underbrace{\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)}_{0}\right] = 0.$$

$$Var(d) = E(d\,d') = E\left\{\left[\varepsilon_{T_2} - X_{T_2}\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)\right]\left[\varepsilon_{T_2} - X_{T_2}\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)\right]'\right\} =$$

$$= \sigma^2 \cdot I_{T_2} + X_{T_2} \cdot Var\left(\hat{B}_{T_1}\right) \cdot X'_{T_2} =$$

$$= \sigma^2 \cdot \left[I_{T_2} + X_{T_2} \cdot \left(X'_{T_1} X_{T_1}\right)^{-1} \cdot X'_{T_2}\right].$$

όπου $Var\left(\hat{B}_{T_1}\right) = E\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)\left(\hat{B}_{T_1} - B\right)' = \sigma^2 \cdot \left(X'_{T_1} X_{T_1}\right)^{-1}.$

αν $\varepsilon_T \sim Niid(0, \sigma^2)$

τότε $d \sim N(0, var(d))$.

$$d' [Var(d)]^{-1} \cdot d \sim X^2_{T_2}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1}}{\sigma^2} \sim X^2_{T_1}$$

ω) Τιμή κριτηρίου:

$$F_{chow} = d' \cdot [Var(d)]^{-1} \cdot d \,/\, T_2 = d' \left\{ \left[I_{T_2} + X_{T_2} (X'_{T_1} X_{T_1})^{-1} X'_{T_2} \right] \cdot \hat{\sigma}^2_{T_1} \right\}^{-1} d \,/\, T_2$$

$$= \frac{d' \cdot \left[I_{T_2} + X_{T_2} (X'_{T_1} X_{T_1})^{-1} X'_{T_2} \right]^{-1} d \,/\, T_2}{\hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1} / T_1 - k}.$$

αφού $\hat{\sigma}^2_{T_1} = \dfrac{\hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1}}{T_1 - k}$..

$F_{chow} \sim F_{T_2, T_1 - k}$. απορ. H_0 αν $F_{chow} > F_{T_2, T_1-k, \alpha}$.

Εναλλακτικός τρόπος.

1) $y_{T_1} = X_{T_1} B + \varepsilon_{T_1}$ εκτιμώ, $\rightarrow$ βρίσκουμε $Res.S.S_{T_1} = \hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1}$

2) $y = XB + \varepsilon$ για όλα τα data $\rightarrow$ βρίσκουμε $Res S S_T = \hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}$.

3) $$F_{chow} = \frac{(RSS_T - RSS_{T_1}) / T_2}{RSS_{T_1} / (T_1 - k)} = \frac{(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1}) / T_2}{\hat{\varepsilon}'_{T_1} \hat{\varepsilon}_{T_1} / (T_1 - k)} \sim F_{T_2, T_1 - k}.$$

Έλεγχοι Αλλαγών στους συντελεστές ενός υποδείγματος.

• εκτίμηση συντελεστών για διαφορετικά δείγματα παρατηρήσεων.

▶ $Y = XB + \varepsilon.$ 2 καθεστώτα

1: $t = 1, \dots, T_1.$

2: $t = T_1+1, T_1+2, \dots, T.$

το υπόδειγμα γράφεται:

$$\underset{T\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \underset{T\times 2K}{\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}} \underset{2K\times 1}{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}} + \underset{T\times 1}{\varepsilon}. \quad (3)$$

$y_1 : T_1 \times 1$ $\qquad X_1 : T_1 \times K.$

$y_2 : T_2 \times 1 = [T-T_1]\times 1.$ $\qquad X_2 : T_2 \times K = (T-T_1)\times K.$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T_1} \\ \hline y_{T_1+1} \\ y_{T_1+2} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & X_{12} & \dots & X_{1K} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & X_{22} & \dots & X_{2K} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{T_1,2} & \dots & X_{T_1K} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & X_{T_1+1,2} & \dots & X_{T_1+1,K} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & X_{T_1+2,2} & \dots & X_{T_1+2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & X_{T,2} & \dots & X_{T,K} \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1K} \\ \hline B_{21} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{2K} \end{bmatrix}$$

▶ Το υπόδειγμα (3) μπορεί να γραφεί και με τη χρήση ψευδομεταβλητών:

$$y_t = B_{11}\cdot d_{t1} + B_{12}\cdot X_{t2}\cdot d_{t1} + B_{13}\cdot X_{t3}\cdot d_{t1} + \dots + B_{1K}\cdot X_{Kt}\cdot d_{t1}$$

$$+ B_{21}\cdot d_{t2} + B_{22}\cdot X_{t2}\cdot d_{t2} + \dots + B_{2K}\cdot X_{Kt}\cdot d_{t2} + \varepsilon_t. =$$

$$= \begin{pmatrix} d_{t1} & X_{t2}d_{t1} & \dots & X_{tK}d_{t1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{t2} & X_{t2}d_{t2} & \dots & X_{tK}d_{t2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{2K} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

όπου $d_{t1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow T_1\times 1$ και $d_{t2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow T_1\times 1 \\ \leftarrow T_2\times 1 \end{matrix}$

▶ LS εκτιμητής.

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_1'y_1 \\ X_2'y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} \cdot X_1'y_1 \\ (X_2'X_2)^{-1} \cdot X_2'y_2 \end{bmatrix}.$$

άρα $\hat{\beta}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1$, $\hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1} \cdot X_2'y_2$.

$$Var\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

όπου $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T-2k}$.

δηλ. $var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \cdot (X_1'X_1)^{-1}$

$var(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 \cdot (X_2'X_2)^{-1}$.

θα μπορούσαν να εκτιμηθούν ξεχωριστά : $\hat{\beta}_1 \to$ από $t=1 \ldots T_1$

$\hat{\beta}_2 \to$ από $t = T_1+1, \ldots, T$

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1'\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2'\hat{\varepsilon}_2.$$

επειδή ο πίνακας $\begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 \\ 0 & X_2'X_2 \end{bmatrix}$ είναι block diagonal (κατά μπλοκ διαγώνιος).

▶ Έλεγχος: $H_0 : \beta_1 = \beta_2$.

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$.

$$R \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = r$$

$$(k \times 2k) \; (2k \times 1) = (k \times 1).$$

$$H_0 : \left\{ \begin{matrix} \beta_{11} = \beta_{21} \\ \beta_{12} = \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{1k} = \beta_{2k} \end{matrix} \right\}$$

όπου

$$R = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{array} \right], \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{1k} \\ \hline \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F = \frac{\left(R\cdot\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix} - r\right)' \cdot \left\{R\cdot Var\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}\cdot R'\right\}^{-1}\cdot\left(R\cdot\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix} - r\right)}{k} \sim F_{k,T-2k}.}$$

αν $F > F_{k,T-2k,\alpha}$ απορ. H_0.

- Ισοδύναμος τρόπος (β)

Υπόδειγμα (3): $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + \varepsilon$. εκτιμώ $\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}$ και βρίσκω $\hat{\varepsilon}$,

$\uparrow$ β αλλάζουν

και αθροισμα τετραγ. καταλοίπων $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$.

Υπόδειγμα (ρ): $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} B + \varepsilon^*$ ή $Y = XB + \varepsilon^*$, εκτιμώ $\hat{B}$, υπολογίζω $\hat{\varepsilon}^*$, υπολ. $\hat{\varepsilon}^{*\prime}\hat{\varepsilon}^*$.

$\uparrow$ β σταθερά

$$\boxed{F = \frac{\left[\left(\hat{\varepsilon}^{*\prime}\hat{\varepsilon}^*\right) - \left(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\right)\right]/k}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/(T-2k)} \sim F_{k,\,T-2k}.}$$

Βάσει του $F = \dfrac{(RSS_R - RSS_u)/J}{RSS_u/(N-K)} = \dfrac{\left(\hat{\varepsilon}^{*\prime}\hat{\varepsilon}^{*} - \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\right)/J}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/(N-K)} \sim F_{J,N-K}$ (KG p.4)

ΕΛΕΓΧΟΙ ΑΛΛΑΓΗΣ ΕΝΟΣ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ.

• Έλεγχο Αλλαγής στη Σταθερά.

• Υπόδειγμα:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & 0 & \tilde{X}_1 \\ 0 & i_2 & \tilde{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} + \varepsilon.$$

$$\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{T_1 2} & \dots & X_{T_1 k} \end{pmatrix} \qquad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} X_{T_1+1,2} & \dots & X_{T_1+1,k} \\ X_{T_1+2,2} & \dots & X_{T_1+2,k} \\ \vdots & & \\ X_{T,2} & \dots & X_{T,k} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

χωρίς στήλη για σταθερά

$$i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow T_1 \times 1 \text{ vector}. \qquad i_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow (T-T_1) \times 1 \text{ vector}.$$

• $y_t = \beta_{11} \cdot d_{t1} + \beta_{21} \cdot d_{t2} + \beta_2 X_{t2} + \dots + \beta_k X_{tk} + \varepsilon_t.$

• $H_0: \beta_{11} = \beta_{21}.$

$H_1: \beta_{11} \neq \beta_{21}.$

$$F = \frac{\left[R \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{21} \\ \hat{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} - r\right]' \cdot \left\{ R \cdot Var \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{21} \\ \hat{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \cdot R' \right\}^{-1} \cdot \left[R \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{21} \\ \hat{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} - r \right]}{1} \sim$$

$H_0: R \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = r.$

$\sim F_{1, T-k-1}$

$1, T-(k+1).$

όπου $\underset{[1 \times (k+1)]}{R} = (1 \quad -1 \quad \underbrace{0 \dots 0}_{k-1})$, $\quad \underset{(k+1)\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}}$, $\quad \underset{1\times 1}{r}$

Έλεγχος αλλαγής στους συντελεστές κλίσης

• υπόδειγμα:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \tilde{X}_1 & 0 \\ i_2 & 0 & \tilde{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} + \varepsilon .$$

όπου

$$\tilde{\beta}_1 = \underset{(k-1)\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \vdots \\ \beta_{1k} \end{pmatrix}}, \quad \tilde{\beta}_2 = \underset{(k-1)\times 1.}{\begin{pmatrix} \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \vdots \\ \beta_{2k} \end{pmatrix}}, \quad \tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T_1,2} & \dots & x_{T_1,k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{T_1+1,2} & \dots & x_{T_1+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{T,2} & & x_{T,k} \end{pmatrix}.$$

$$i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow T_1 \times 1. \qquad i_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow T_2 \times 1. = (T-T_1)\times 1.$$

• $y_t = \beta_1 + \beta_{12} x_{t2} d_{t1} + \dots + \beta_{1k} x_{tk} \cdot d_{t1} + \beta_{22} \cdot x_{t2} \cdot d_{t2} + \dots + \beta_{2k} \cdot x_{tk} \cdot d_{t2} + \varepsilon_t .$

• $H_0: \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$

$H_1: \tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_2 .$

$$H_0: \underset{(k-1)\times[1+2\cdot(k-1)].}{R} \cdot \underset{[1+2\cdot(k-1)]\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix}} = \underset{(k-1)\times 1.}{r}$$

όπου

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots}_{k-1} & & & 1 & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots}_{k-1.} & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{\left[R \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_2 \end{pmatrix} - r \right]' \left\{ R \cdot Var\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_2 \end{pmatrix} \cdot R' \right\}^{-1} \cdot \left[R \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_2 \end{pmatrix} - r \right].}{k-1.} \rightarrow F_{k-1,\, T-2(k-1)-1} .$$