# Αυτοσυσχέτιση

## Άσκηση 1

$$Y_t = \alpha + e_t$$

Πάσχει το $e_t$ από αυτοσυσχέτιση ?

$$\begin{tikzcd}
 & e_{t-1} \\
e_t \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & e_{t-2} \\
 & e_{t-3}
\end{tikzcd}$$

χρονικές υστερήσεις του $e_t$

$$cov(e_t, e_{t-s}) \neq 0 \quad \forall t, \; s>1$$

1) Correlogram των καταλοίπων

2) Breusch-Godfrey έλεγχος

# Correlogram καταλοίπων

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης

$$\hat{\rho}_1 = corr(\hat{e}_t, \hat{e}_{t-1})$$

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης δεύτερης τάξης

$$\hat{\rho}_2 = corr(\hat{e}_t, \hat{e}_{t-2})$$

$$\vdots$$

$$\hat{\rho}_s = corr(\hat{e}_t, \hat{e}_{t-s}) \rightarrow$$ Συντελεστής αυτοσυσχέτισης $s$ τάξης

όπου

$$\boxed{\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=s+1}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-s}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2}} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2}$$

$$\hat{e}_t = \alpha + b\,\hat{e}_{t-1} + v_t$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{e}_t - \bar{\hat{e}}_t)(\hat{e}_{t-1} - \bar{\hat{e}}_{t-1})}{\sum_{t=2}^{T} (\hat{e}_{t-1} - \bar{\hat{e}}_{t-1})^2} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{e}_{t-1}^2}$$

$$\bar{\hat{e}}_t = \bar{\hat{e}}_{t-1} \approx 0$$

Αρα $\hat{b} \approx \hat{\rho}_1$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τεστάρουμε την στατιστική σημαντικότητα των πρώτων $\mu$ συντελεστών αυτοσυσχέτισης

$H_0$: $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\mu = 0$

$H_1$: ένα από αυτά τουλάχιστον είναι $\neq 0$

$$Q_\mu = T(T+2) \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\hat{\rho}_s^2}{T-s} \sim \chi^2_\mu$$

# Breusch-Godfrey test

Έστω $y_t = a + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + \dots + b_k X_{kt} + e_t$

Έλεγχος αυτοσυσχέτισης $J$ τάξης

1) Τρέχουμε την αρχική παλινδρόμηση και αποθηκεύουμε τα κατάλοιπα $\hat{e}_t$

2) Τρέχουμε την βοηθητική παλινδρόμηση

$$\hat{e}_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{e}_{t-1} + \delta_2 \hat{e}_{t-2} + \dots + \delta_J \hat{e}_{t-J} + \gamma_1 X_{1t} + \dots + \gamma_k X_{kt} + u_t$$

3) Τεστάρουμε $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_J = 0$ (όχι αυτοσυσχέτιση)

$H_1$: ένα τουλάχιστον $\neq 0$ (αυτοσυσχέτιση)

4) $LM_{BG} = (T-J)R^2 \overset{a}{\sim} \chi^2_J$

5) Αν $LM_{BG} > \chi^2_{critical} \Rightarrow$ Απορρίπτουμε $H_0$

# Τυπικά σφάλματα του Newey-West

1) Ελέγχουμε το μοντέλο που πάσχει από αυτοσυσχέτιση και αντικαθιστούμε τις εσφαλμένες τιμές των τυπικών σφαλμάτων με τα τυπικά σφάλματα του Newey-West.

Τους εκτιμητές των παραμέτρων που παίρνουμε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων τους διατηρούμε.

2) Αυτά τα τυπικά σφάλματα είναι αξιόπιστα σε μεγάλα δείγματα.

## Γιατί έχουμε αυτοσυσχέτιση

Ένας βασικός λόγος:

Έστω ότι

$$y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma y_{t-1} + e_t$$

είναι το σωστό μοντέλο

Έστω ότι εμείς εκτιμούμε το λάθος μοντέλο

$$y_t = k_0 + k_1 X_t + v_t$$

Τότε $v_t = \gamma y_{t-1} + e_t$

και άρα το $v_t$ θα πάσχει από αυτοσυσχέτιση

Στο παράδειγμα μας ξεκινάμε με το μοντέλο

$$r_t = \alpha + b_1 r_{t-1} + e_t$$

Δηλαδή το $r_t \sim AR(1)$ μοντέλο

Αυτό το μοντέλο πάσχει από αυτοσυσχέτιση άρα εφαρμόζουμε το

$$r_t = \alpha + b_1 r_{t-1} + b_2 r_{t-2} + e_t$$

Δηλαδή το $r_t \sim AR(2)$ μοντέλο

Αυτό το μοντέλο δεν πάσχει από αυτοσυσχέτιση.

GLS

Αν γνωρίζουμε τη μορφή αυτοσυσχέτισης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε GLS

Το μοντέλο μας: $r_t = \alpha + e_t$

Έστω ότι $e_t \sim AR(1)$

Άρα θέλουμε να εκτιμήσουμε το

$$r_t = \alpha + e_t$$

$$e_t = \kappa \cdot e_{t-1} + v_t$$

$$v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

# Έλεγχος δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας

Έχοντας εξαλείψει την αυτοσυσχέτιση μπορούμε να ελέγξουμε για ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας

Άρα το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το

$$\boxed{r_t = a + b_1 r_{t-1} + b_2 r_{t-2} + e_t}$$

δηλαδή $r_t \to AR(2)$

Οι χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές χαρακτηρίζονται από δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

$$\sigma_t^2 \to \begin{array}{l} \sigma_{t-1}^2 \\ \sigma_{t-2}^2 \\ \sigma_{t-3}^2 \\ \vdots \end{array} \Rightarrow \quad e_t^2 \to \begin{array}{l} e_{t-1}^2 \\ e_{t-2}^2 \\ e_{t-3}^2 \\ \vdots \end{array}$$

Για να ελεγξουμε αν υπαρχει δεσμευμενη ετεροσκεδαστικοτητα αρκει να ελεγξουμε αν τα τετραγωνα των καταλοιπων αυτοσυσχετιζονται

α) Correlogram των τετραγωνων των καταλοιπων

β) Ελεγχος ARCH

Οι ελεγχοι θα γινουν πανω στο μοντελο

$$r_t = \alpha + b_1 r_{t-1} + b_2 r_{t-2} + e_t$$

## $\boxed{\text{Έλεγχος ARCH}}$

Έστω ότι έχουμε 2 υποδείγματα

$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$, όπου τα $e_t$ δεν αυτοσυσχετίζονται

Έλεγχος για δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα $d$ τάξης

1) Τρέχουμε 2 υποδείγματα και σώζουμε τα κατάλοιπα $\hat{e}_t$

2) Τρέχουμε την βοηθητική παλινδρόμηση

$$\hat{e}_t^2 = \kappa_0 + \kappa_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \dots + \kappa_d \hat{e}_{t-d}^2 + v_t$$

3) $H_0: \kappa_1 = \dots = \kappa_d = 0$ (όχι δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα)
$H_1$: ένα τουλάχιστον $\neq 0$ (δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα)

4) $LM_{ARCH} = (T-d) R^2 \sim \chi^2_d$

5) Αν $LM_{ARCH} > \chi^2_{critical} \Rightarrow$ Απορρίπτεται $H_0$

## ARCH(1)

$$Y_t = \alpha + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + e_t$$

$$\boxed{\sigma_t^2 = k_0 + k_1 e_{t-1}^2}$$

## GARCH(1,1)

$$Y_t = \alpha + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + e_t$$

$$\boxed{\sigma_t^2 = k_0 + k_1 e_{t-1}^2 + k_2 \sigma_{t-1}^2}$$

Στην πραγματικότητα όταν πρόκειται να μοντελοποιήσουμε την δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα με ένα GARCH(p,q) δεν ξέρουμε ποια είναι η σωστή τιμή του p και του q που πρέπει να επιλέξουμε.

Θα δοκιμάσουμε το GARCH(3,3)

$$\sigma_t^2 = k_0 + k_1 e_{t-1}^2 + k_2 e_{t-2}^2 + k_3 e_{t-3}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-2}^2 + \delta_3 \sigma_{t-3}^2$$