Κεφάλαιο 7.

24

Ετεροσκεδαστικότητα.

$Y = XB + \varepsilon.$

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ \vdots & & & \vdots \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \cdot I.$$

Χρονολογικές σειρές (πχ)
Διαστρωματικά δεδομένα (πχ)

- συνέπειες ύπαρξης ετεροσκεδαστικότητας στη συμπεριφορά ελαχίστων τετραγώνων
- διαγνωστικός έλεγχος
- μέθοδος εκτίμησης

7.1 Συνέπειες του προβλήματος της ετεροσκεδαστικότητας

$$Var(\varepsilon) = \Omega = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}.$$

- οι LS εκτιμητές παραμένουν αμερόληπτοι αλλά δεν είναι αποτελεσματικοί

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1} \cdot X' \cdot (XB + \varepsilon) = (X'X)^{-1} \cdot X'XB + (X'X)^{-1} \cdot X'\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \beta + (X'X)^{-1} \cdot X'\varepsilon.$$

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) = \beta + (X'X)^{-1} \cdot X' \cdot \underbrace{E(\varepsilon)}_{0} \Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta.$$

η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας επηρεάζει τη διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\beta}$.

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\right] = E\left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\right] =$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon \cdot \varepsilon'X(X'X)^{-1}\right] = (X'X)^{-1} \cdot X' \cdot E(\varepsilon\varepsilon') \cdot X(X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}.$$

όπου $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega \neq \sigma^2 I.$

$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1}$ ομοσκεδαστικότητα

Πχ $y = \beta_0 X + \varepsilon$ (απλό γραμμικό υπόδειγμα χωρίς σταθερά). (25)

όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

$$Var(\hat\beta) = \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1} = \sigma^2 \cdot \left[(x_1\ x_2 \dots x_N) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right]^{-1} = \sigma^2 \cdot \left(\sum x_i^2\right)^{-1} = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right).$$

λόγω από ομοσκεδαστικότητα

$$Var(\hat\beta) = (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1} = \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right) \cdot (x_1\ x_2 \dots x_N) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right)^2 \cdot \left(x_1\sigma_1^2\ \ x_2\sigma_2^2\ \dots\ x_N\sigma_N^2\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum x_i^2}\right)^2 \cdot \left(x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \dots + x_N^2\sigma_N^2\right)$$ (λόγω από ετεροσκεδαστικότητα)

Προβλήματα • σε έλεγχο υποθέσεων για τους συντελεστές

• σε διάστημα εμπιστοσύνης πρόβλεψης

Θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ο $Var(\hat\beta) = (X'X)^{-1} \cdot X'\Omega X (X'X)^{-1}$.

όμως ο Ω δεν μπορεί να εκτιμηθεί έχοντας N κατάλοιπα $\hat\varepsilon_1, \hat\varepsilon_2, \dots \hat\varepsilon_N$ γιατί έχει N αγνώστους $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2$.

White (1980) πρότεινε μια λύση.

7.2 Διαγνωστικοί έλεγχοι για ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας. (26)

• **Έλεγχος Goldfeld-Quandt.** (ισχύει για δύο διαφορετικά δείγματα).

Έστω N_1+1 παρατηρήσεις του δείγματος που αλλάζει η διακύμανση.

πχ. $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$. $i=1,\dots N$.

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad$ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. $\qquad$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$$GQ = \frac{\hat\sigma_2^2}{\hat\sigma_1^2} = \frac{\frac{RSS_2}{N_2-k}}{\frac{RSS_1}{N_1-k}}. \qquad GQ = \frac{\hat\sigma_1^2}{\hat\sigma_2^2} = \frac{RSS_1/N_1-k}{RSS_2/N_2-k}.$$

$$GQ \sim F_{(N_2-k,\, N_1-k)}. \qquad GQ \sim F_{N_1-k,\, N_2-k}.$$

υποθέτει κανονικά και ανεξάρτητα ε_i.

απορ. H_0 αν $GQ > F_{N_2-k, N_1-k, 1-}$

• **Έλεγχος Breusch-Pagan.**

· εφαρμόζεται σε μεγάλα δείγματα παρατηρήσεων.

· ε_i η κανονική κατανομή

$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$, $i=1,\dots N$.

όπου σ_i^2 η διακύμανση του ε_i είναι συνάρτηση κάποιων ανεξ. μετ. Z_{ip}. $p=1,2,\dots P$

$\sigma_i^2 = h(\alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_p Z_{ip})$. $\qquad$ πχ. $Z_{ip} = X_{ik}$

πχ: $\sigma_i^2 = e^{\alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_p Z_{ip}}$ ή $\log(\sigma_i^2) = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_p Z_{ip}$.

$H_0: \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_p = 0$.

$H_1: \alpha_2 \neq 0$ ή $\alpha_3 \neq 0$ ή ... $\alpha_p \neq 0$.

κάτω από H_0: $\sigma_i^2 = h(\alpha_1) = \sigma^2$ $\forall i$.

Αφού τα σ_i^2 χρησιμοποιούνται τα $\hat\varepsilon_i^2$, προκύπτουν από τη συνάρτηση του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος.

Μέθοδος Breusch-Pagan 27

1) εκτίμηση πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος και καταλοίπων.

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ik}$.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i^2$ (μεγάλο δείγμα: διαιρώ με N αντί N-k).

$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_p Z_{ip} + v_i$. (auxiliary regression) βοηθητική παλινδρόμηση.

υπολογίζω ESS. (explained sum of squares).

κριτήριο $LM_{BP} = \frac{1}{2} \cdot ESS \sim \chi^2_{p-1}$.

αν $LM_{BP} > \chi^2_{p-1,\alpha} \rightarrow$ απορ. H_0. δηλ. υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα

Εναλλακτικός έλεγχος: (του Godfrey).

κριτήριο: $LM_G = N \cdot R^2$ όπου N αριθμός των παρατηρήσεων

R^2: συντελεστής προσδιορισμού της βοηθητικής παλινδρόμησης.

$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \dots + \alpha_p Z_{ip} + v_i$

$LM_G \sim \chi^2_{p-1}$.

(23)

- **Έλεγχος White.**

· μεγάλα δείγματα.

· δεν υποθέτει κανονική κατανομή για τα ε_i.

$\hat{\varepsilon}_i^2$ εξαρτώνται από 1) X_{ik}, 2) X_{ik}^2, 3) από $X_{ik}\cdot X_{ij}$.

πχ. $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$. $k=3$ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{i2} + \alpha_3 X_{i3} + \alpha_4 X_{i2}^2 + \alpha_5 X_{i3}^2 + \alpha_6 \cdot X_{i2} X_{i3} + v_i.$$

κριτήριο $LM_W = N\cdot R^2 \sim \chi^2_L$. όπου $L = \frac{k\cdot(k+1)}{2} - 1$.

μειονέκτημα: μεγάλος αριθμός ανεξαρτ. μεταβ. στην βοηθητική παλινδρ

- **Έλεγχος ARCH.**

δεσμ. διακ. $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$.

όπου $\varepsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$

βήματα: 1) εκτίμηση $\hat{\varepsilon}_t$

2) βοηθητική παλινδρ. $\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + v_t$.

$LM_{ARCH} = (T-p)\cdot R^2$. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

$H_1: \alpha_1 \neq 0$ ή … ή $\alpha_p \neq 0$.

$LM_{ARCH} \sim \chi^2_p$

αν $LM_{ARCH} > \chi^2_{p,\alpha}$ → απορ. H_0 → ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας

73 Εκτίμηση συντελεστών γραμμικού υποδείγματος κάτω από ετεροσκεδαστικότητα. 29

Γενικευμένη μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (Generalized Least Squares). GLS εκτιμητής. (είναι αποτελεσματική)

• $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, N$. $\varepsilon_i \sim D(0, \sigma_i^2)$.

έστω

• $\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_i$, όπου Z_i κάτι με προκαθορισμένες τιμές.

ας υποθέσουμε ότι α_0, α_1 είναι γνωστά.

• μετασχηματισμός:

$$\frac{y_i}{\sigma_i} = \frac{y_i}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 Z_i}} = \beta_1 \cdot \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}} + \beta_2 \cdot \frac{X_{i2}}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}} + \dots + \beta_k \cdot \frac{X_{ik}}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}} + \frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}}$$

ή

$$y_i^* = \beta_1 X_{i1}^* + X_{i2}^* \beta_2 + \beta_3 \cdot X_{i3}^* + \dots + \beta_k \cdot X_{ik}^* + \varepsilon_i^*.$$

ο νέος διαταρακτικός όρος έχει σταθερή διακύμανση.

$$Var(\varepsilon_i^*) = Var\left(\frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}}\right) = \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)} \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 Z_i) = 1. \quad \forall i$$

επίσης

$$E(\varepsilon_i^*) = E\left(\frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}}\right) = \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}} \cdot \underbrace{E(\varepsilon_i)}_{0} = 0.$$

Άρα το μετασχηματισμένο υπόδειγμα μπορεί να εκτιμηθεί και να δώσει αποτελέσματα ως αποτελεσματικός εκτιμητής.

• ο μετασχηματισμός των αρχικών μεταβλητών γίνεται με βάση το $w_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}}$. ο εκτιμητής αναφέρεται και ως weighted least squares (σταθμισμένος εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων).

Γνωρίζουμε όταν $\alpha_0 = 0$ στην συνάρτηση W.L.S. (30)

Δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το α_1;

Έστω: $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$. με $\sigma_i^2 = Var(\varepsilon_i) = \alpha_1 \cdot Z_i$. Τότε:

$$\frac{y_i}{Z_i^{1/2}} = \beta_1 \cdot \frac{1}{Z_i^{1/2}} + \beta_2 \cdot \frac{X_{i2}}{Z_i^{1/2}} + \dots + \beta_k \cdot \frac{X_{ik}}{Z_i^{1/2}} + \frac{\varepsilon_i}{Z_i^{1/2}}$$

$$y_i^* = \beta_1 \cdot X_{i1}^* + \beta_2 X_{i2}^* + \dots + \beta_k \cdot X_{ik}^* + \varepsilon_i^*$$

με $E(\varepsilon_i^*) = E\left(\frac{\varepsilon_i}{Z_i^{1/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{Z_i}} \cdot E(\varepsilon_i) = 0$.

$$V(\varepsilon_i^*) = Var\left(\frac{\varepsilon_i}{Z_i^{1/2}}\right) = \frac{1}{Z_i} \cdot Var(\varepsilon_i) = \frac{1}{\cancel{Z_i}} \alpha_1 \cancel{Z_i} \Rightarrow Var(\varepsilon_i^*) = \alpha_1 \quad \forall i.$$

- Ο Γενικευμένος Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων.

$$\Omega = Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 Z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_0 + \alpha_1 Z_N \end{bmatrix}$$

μετασχηματισμός $y_i^* = \frac{y_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i)^{1/2}}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} \\ \vdots \\ \frac{y_N}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_N)^{1/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_N)^{1/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = P \cdot y.$$

αρχικός πίνακας $X = \begin{pmatrix} 1 & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{N2} & \dots & X_{Nk} \end{pmatrix}$

Έστω • $X^* = \begin{pmatrix} X_{11}^* & \dots & X_{1k}^* \\ X_{21}^* & \dots & X_{2k}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1}^* & \dots & X_{Nk}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & \frac{X_{12}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & \dots & \frac{X_{1k}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} \\ \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & \frac{X_{22}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & & \frac{X_{2k}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_N)^{1/2}} & \frac{X_{N2}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_N)^{1/2}} & & \frac{X_{Nk}}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_N)^{1/2}} \end{pmatrix} =$

(31)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_n)^{1/2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{pmatrix} = P \cdot X.$$

όμοιως

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_i)^{1/2}}$$ δηλ. $$\varepsilon^* = P \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_n)^{1/2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Άρα $\underline{Y^* = X^* \cdot \beta + \varepsilon^*}$ ή

$\underline{P \cdot y = P \cdot X\beta + P \cdot \varepsilon}$ όπου $Y^* = P \cdot Y$, $X^* = P \cdot X$, $\varepsilon^* = P \cdot \varepsilon$.

$$E(\varepsilon^*) = E(P \cdot \varepsilon) = P \cdot E(\varepsilon) = 0.$$

$$Var(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^* \varepsilon^{*\prime}) = E(P \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon' P') = P \cdot E(\varepsilon \varepsilon') \cdot P' = P \cdot \Omega \cdot P'.$$

όμως μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα P ως $P = \Omega^{-1/2}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_1)^{1/2}} & & & \\ & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_2)^{1/2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 Z_n)^{1/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0+\alpha_1 Z_1 & & & \\ & \alpha_0+\alpha_1 Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_0+\alpha_1 Z_n \end{pmatrix}^{-1/2} = \Omega^{-1/2}.$$

τότε $Var(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^* \varepsilon^{*\prime}) = P \cdot \Omega \cdot P' = \Omega^{-1/2} \cdot \Omega \cdot \Omega^{-1/2} = \Omega^{-1/2} \cdot \Omega^{1/2} \cdot \Omega^{1/2} \cdot \Omega^{-1/2} = I.$

άρα τα ε^* πληρούν τις κλασικές υποθέσεις: μέσο μηδέν διακύμανση της μορφής $\sigma^2 I$. $\sigma^2 = 1$

(32)

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}y^{*} =$$

$$= \left((PX)^{\prime}\cdot(PX)\right)^{-1}\cdot\left((PX)^{\prime}\cdot(Py)\right) = \left(X^{\prime}P^{\prime}PX\right)^{-1}\cdot X^{\prime}P^{\prime}Py$$

όπου $P = \Omega^{-1/2}$ άρα $P^{\prime}P = \Omega^{-1/2}\cdot\Omega^{-1/2} = \Omega^{-1}$

άρα $\boxed{\hat{\beta}_{GLS} = \left(X^{\prime}\Omega^{-1}X\right)^{-1}\left(X^{\prime}\Omega^{-1}y\right)}$

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot X^{*\prime}y^{*} = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot X^{*\prime}\left(X^{*}\beta + \varepsilon^{*}\right)$$

$$= \underline{\left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}}\cdot\underline{X^{*\prime}X^{*}}\,\beta + \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot X^{*\prime}\varepsilon^{*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_{GLS} = \beta + \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot X^{*\prime}\varepsilon^{*}.$$

$$E\left(\hat{\beta}_{GLS}\right) = E\left(\beta + \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}\varepsilon^{*}\right) = \beta + \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot X^{*\prime}\underbrace{E\left(\varepsilon^{*}\right)}_{0} = \beta.$$

άρα $\boxed{E\left(\hat{\beta}_{GLS}\right) = \beta.}$ αμερ.

$$Var\left(\hat{\beta}_{GLS}\right) = E\left[\left(\hat{\beta}_{GLS} - E(\hat{\beta}_{GLS})\right)\left(\hat{\beta}_{GLS} - E(\hat{\beta}_{GLS})\right)^{\prime}\right] = E\left[\left(\hat{\beta}_{GLS} - \beta\right)\left(\hat{\beta}_{GLS} - \beta\right)^{\prime}\right]$$

$$= E\left[\left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}\varepsilon^{*}\cdot\varepsilon^{*\prime}X^{*}\left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\right] = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}E\left(\varepsilon^{*}\varepsilon^{*\prime}\right)\cdot X^{*}\left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}$$

$$= \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\cdot\underline{X^{*\prime}I\cdot X^{*}}\cdot\underline{\left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}} = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1} =$$

$$= \left((PX)^{\prime}(PX)\right)^{-1} = \left(X^{\prime}P^{\prime}PX\right)^{-1} = \underline{\underline{\left(X^{\prime}\Omega^{-1}X\right)^{-1}}}.$$

$$\boxed{Var\left(\hat{\beta}_{GLS}\right) = \left(X^{\prime}\Omega^{-1}X\right)^{-1}}$$

(33)

Στα πιο πάνω θεωρήσαμε ότι α_0, α_1 γνωστά.
Αυτό δεν είναι ρεαλιστικό. Αυτό που γίνεται είναι το εξής,

1) Εκτιμάμε το $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$.

δηλαδή βρίσκουμε τα $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots \hat{\beta}_k$ με OLS.

2) υπολογίζουμε τα $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ik}$. κατάλοιπα

3) χρησιμοποιούμε την βοηθητική παλινδρόμηση

$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_i + V_i$ δηλ. εκτιμάμε με OLS τα $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$.

4) Βρίσκουμε $\hat{\underline{\Omega}}$. χρησιμοποιώντας τα $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$

5) Βρίσκουμε $\hat{\beta}_{GLS} = \left(X'\hat{\underline{\Omega}}^{-1}X\right)^{-1} \cdot \left(X'\hat{\underline{\Omega}}^{-1}y\right)$.

Feasible GLS.