

Ετεροσκεδαστικότητα

Κάτω από τις κλασσικές υποθέσεις είχαμε θεωρήσει ότι ο διαταρακτικός όρος ε_i είναι ομοσκεδαστικός, δηλ.

$$\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

στην πράξη όμως η διακύμανση του διαταρακτικού όρου διαφέρει από παρατήρηση (πχ. οικονομική μονάδα) σε παρατήρηση, δηλ παρουσιάζεται το φαινόμενο της **ετεροσκεδαστικότητας**, όπου έχουμε:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

A. Συνέπειες ης ετεροσκεδαστικότητας στο LS εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

Αμεροληψία (ισχύει): Γράψτε $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ως

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

οπότε

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta}, \quad \text{καθώς } E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}.$$

Συνέπεια (ισχύει): Γράψε τον εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ως

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_N = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i\varepsilon_i$$

και πάρε όρια κατά πιθανότητα ($p\lim$):

$$p \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\beta}}_N = \boldsymbol{\beta} + \left(p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \varepsilon_i \right) = \boldsymbol{\beta},$$

καθώς $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \varepsilon_i = E(\mathbf{x}_i \varepsilon_i) = \mathbf{0}$ και $p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \equiv \mathbf{Q}_{xx}$.

Διακύμανση – αποτελεσματικότητα (δεν ισχύει): Η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης δίδεται ως

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \end{aligned}$$

καθώς $E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ λόγω ετεροσκεδαστικότητας. Η μήτρα αυτή διαφέρει της

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \quad \text{που ισχύει κάτω από ομοσκεδαστικότητα.}$$

Επομένως, ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ δεν είναι BLUE (δεν ισχύει το θεώρημα Gauss-Markov). Η δε χρήση της μήτρας $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ στον έλεγχο υποθέσεων για την εκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων οδηγεί σε σφάλματα. Η σωστή μήτρα που θα πρέπει να χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η ακόλουθη:

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Παράδειγμα της $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ για το απλό υπόδειγμα $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$:

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{-1} [x_1, x_2, \dots, x_N] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^2} (x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + \dots + x_N^2 \sigma_N^2).$$

Κάτω από ομοσκεδαστικότητα, αυτή γίνεται: $\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^2}$.

B. Διαγνωστικοί έλεγχοι για την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας

Ο έλεγχος Goldfeld-Quandt: (Για ομαδοποιημένα στοιχεία, όπου η διακύμανση αλλάζει μετά από μια παρατήρηση, έστω την παρατήρηση N_1). Ως παράδειγμα, θεωρήστε το υπόδειγμα:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, N_1, N_1+1, N_1+2, \dots, N$$

όπου ο διαταρακτικός όρος ε_i κατανέμεται ως εξής:

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_1^2) \text{ for } i=1, 2, \dots, N_1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_2^2) \text{ for } i=N_1+1, \dots, N,$$

N_1 αποτελεί το **σημείο αλλαγής** (changing point). Αν $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, η παραπάνω μορφή ετεροσκεδαστικότητας μπορεί να ελεγχθεί θέτοντας την παρακάτω μηδενική υπόθεση:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad (\text{ομοσκεδαστικότητα})$$

$$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \quad (\text{ετεροσκεδαστικότητα})$$

Για τον έλεγχο αυτό, οι Goldfeld-Quandt πρότειναν το ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:¹

$$GQ \equiv \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{\frac{RSS_2}{N_2 - K}}{\frac{RSS_1}{N_1 - K}}$$

¹ Στο σημείο αυτό, σημειώστε ότι αν η εναλλακτική υπόθεση είχε τεθεί ως $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, τότε το κριτήριο GQ θα πρέπει να υπολογισθεί ως $GQ \equiv \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$.

όπου RSS_1 και RSS_2 αποτελούν τα αθροίσματα των τετραγώνων των καταλοίπων του γραμμικού υποδείγματος που εκτιμάται αντίστοιχα με βάση τις πρώτες N_1 παρατηρήσεις του δείγματος $i=1,2, \dots, N_1$ και τις υπόλοιπες $N_2 = N - N_1$, που ορίζονται ως N_1+1, N_1+2, \dots, N . K αποτελεί τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος μαζί με τη σταθερά.

Κάτω από την υπόθεση $\varepsilon_i \sim \text{NIID}(0, \sigma_i^2)$, το στατιστικό GQ κατανέμεται ως

$$GQ \sim F_{(N_2-K, N_1-K)},$$

που σημαίνει ότι, αν η τιμή του GQ είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της $F_{(N_2-K, N_1-K)}$, τότε η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται και θα γίνεται αμέσως δεκτή η εναλλακτική υπόθεση ότι $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Οι έλεγχοι Breusch-Pagan/ Godfrey (ασυμπτωτικοί-ισχύουν για μεγάλα δείγματα): Θεωρούν ότι η ετεροσκεδαστικότητα ακολουθεί το εξής παραμετρικό υπόδειγμα:²

$$\sigma_i^2 = h(\alpha_1 + \alpha_2 z_{i2} + \dots + \alpha_p z_{ip}),$$

όπου οι μεταβλητές z_{ip} μπορεί να περιλαμβάνουν κάποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές του γραμμικού πολλαπλού υποδείγματος x_{ik} . Για τον έλεγχο αυτής της μορφής ετεροσκεδαστικότητας, η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική της θέτονται ως εξής:

$$H_0: \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_p = 0 \quad (\text{ομοσκεδαστικότητα } \sigma_i^2 = h(\alpha_1) = \sigma^2, \forall i)$$

$$H_a: \alpha_2 \neq 0 \text{ ή } \alpha_3 \neq 0 \dots \text{ ή } \alpha_p \neq 0 \quad (\text{ετεροσκεδαστικότητα})$$

² Επειδή η διακύμανση θα πρέπει πάντα να είναι θετική, μια συνάρτηση $h(\cdot)$ που συνήθως θεωρείται για αυτή είναι η εκθετική: $\sigma_i^2 = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 z_{i2} + \dots + \alpha_p z_{ip})}$. Η συνάρτηση αυτή συνεπάγεται ότι ο λογάριθμος της σ_i^2 αποτελεί γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών z_{ip} .

Για τη διεξαγωγή του ελέγχου αυτού, οι **Breusch-Pagan** πρότειναν τα ακόλουθα στάδια:

Στάδιο 1: Εκτίμηση του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος με τη LS μέθοδο και υπολογισμό των καταλοίπων του ως

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik} \quad \text{και της διακύμανσής} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2.$$

Στάδιο 2: Εκτίμηση της ακόλουθης **βοηθητικής παλινδρόμησης**:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = a_1 + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3} + \dots + a_p z_{ip} + v_i,$$

και υπολογισμός του αθροίσματος ESS (explained sum of squares) αυτής. Με βάση αυτό υπολογίζουμε το ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:

$$LM_{BP} \equiv \frac{1}{2} ESS,$$

που, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ακολουθεί τη χ^2 -κατανομή με (P-1) βαθμούς ελευθερίας, δηλ.

$$LM_{BP} \equiv \frac{1}{2} ESS \sim \chi^2_{(P-1)},$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας (P-1) ισούται με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών της βοηθητικής παλινδρόμησης χωρίς τη σταθερά. Αν η τιμή του LM_{BP} είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της $\chi^2_{(P-1)}$ -κατανομής, τότε η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται και θα γίνεται δεκτή η εναλλακτική της.

Ο Godfrey πρότεινε ένα απλούστερο τρόπο για τη διεξαγωγή του παραπάνω Breusch-Pagan ελέγχου, όπου στο δεύτερο στάδιο εκτιμάτε η ακόλουθη βοηθητική παλινδρόμηση:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = a_1 + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3} + \dots + a_p z_{ip} + v_i, \quad i=1,2, \dots, N$$

και υπολογίζεται ο συντελεστής προσδιορισμού αυτής R^2 και το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_G \equiv N \cdot R^2.$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας, αυτό κατανέμεται ως εξής:

$$LM_G \equiv N \cdot R^2 \sim \chi^2_{(p-1)}.$$

Ο έλεγχος White: Είναι αντίστοιχος των ελέγχων Breusch-Pagan και Godfrey, αλλά θεωρεί ως ερμηνευτικές μεταβλητές του υποδείγματος της διακύμανσης τα ακόλουθα σύνολα μεταβλητών:

- (i) τα επίπεδα των ερμηνευτικών μεταβλητών του υποδείγματος x_{ik} ,
- (ii) τα τετράγωνα τους x_{ik}^2 και
- (iii) τα μεταξύ τους γινόμενα $x_{ik}x_{is}$,

Ως παράδειγμα, για το ακόλουθο γραμμικό υπόδειγμα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

η βοηθητική παλινδρόμηση ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i2} + \alpha_3 x_{i3} + \alpha_4 x_{i2}^2 + \alpha_5 x_{i3}^2 + \alpha_6 x_{i2}x_{i3} + v_i$$

Με βάση αυτή υπολογίζεται το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_W \equiv N \cdot R^2,$$

που ακολουθεί τη χ^2 -κατανομή με L βαθμούς ελευθερίας, δηλ.

$$LM_W \equiv N \cdot R^2 \sim \chi^2_{(L)}. \quad L = \frac{K(K+1)}{2} - 1 \text{ είναι ο αριθμός των ερμηνευτικών}$$

μεταβλητών (εκτός της σταθεράς) της παραπάνω βοηθητικής παλινδρόμησης. Στην

πράξη επειδή το L μπορεί να είναι μεγάλο, συνήθως διαλέγεται μια από τις τρεις κατηγορίες μεταβλητών για την εκτίμηση της βοηθητικής παλινδρόμησης και, συνήθως αυτή είναι η (ii).

Ο έλεγχος ARCH: Είναι κατάλληλος για το έλεγχο ετεροσκεδαστικότητας σε γραμμικά υποδείγματα που στηρίζονται σε χρονολογικές σειρές, δηλ.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t.$$

Αυτός θεωρεί ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου ε_t δίνεται από το ακόλουθο δυναμικό υπόδειγμα:

$$\sigma_t^2 \equiv E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2,$$

που αναφέρεται ως ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) – υπόδειγμα αυτοπαλινδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας.

Κάτω από ομοσκεδαστικότητα (μηδενική υπόθεση), το υπόδειγμα αυτό προβλέπει ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$. Για τη διεξαγωγή του ελέγχου ετεροσκεδαστικότητας ARCH, η βοηθητική παλινδρόμηση γράφεται ως:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + v_t,$$

όπου $\hat{\varepsilon}_{t-i}$ ($i=0,1,\dots,p$) αποτελούν τα κατάλοιπα του γραμμικού υποδείματος που εκτιμάται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, και με βάση αυτή υπολογίζεται το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_{ARCH} \equiv (T-p)R^2.$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, αυτό ακολουθεί την χ^2 -κατανομή με p βαθμούς ελευθερίας, δηλ.

$$LM_{ARCH} = (T-p)R^2 \sim \chi^2_{(p)}.$$

Γ. Εκτίμηση γραμμικού υποδείγματος κάτω από ετεροσκεδαστικότητα – ο GLS εκτιμητής

Αν διαγνωστεί ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας, τότε ένας εκτιμητής που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για την εκτίμηση των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος που αποτελεσματικός σε θεωρητική βάση είναι ο γενικευμένος εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (Generalised Least Squares –GLS). Για να παρουσιάσουμε τον GLS εκτιμητή, θεωρήστε το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

και υποθέστε η συνάρτηση διακύμανσης του διαταρακτικού όρου ε_i δίδεται ως:

$$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_i, \quad [\text{ή τυπική απόκλιση: } \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = (\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}]$$

Διαιρώντας το υπόδειγμα με την τυπική απόκλιση συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} &= \\ &= \beta_1 \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} + \beta_2 \frac{x_{i2}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} + \beta_3 \frac{x_{i3}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} + \dots + \beta_k \frac{x_{ik}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} + \frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}} \end{aligned}$$

ή

$$y_i^* = \beta_1 x_{i1}^* + \beta_2 x_{i2}^* + \beta_3 x_{i3}^* + \dots + \beta_k x_{ik}^* + \varepsilon_i^*.$$

Το μετασχηματισμένο υπόδειγμα έχει διαταρακτικό όρο ε_i^* που έχει μέση τιμή μηδέν, δηλ.

$$E(\varepsilon_i^*) = E\left[\left(\frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}}\right) \varepsilon_i\right] = \left(\frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}}\right) E(\varepsilon_i) = 0, \quad \forall i$$

και διακύμανση σταθερή (ίση με τη μονάδα, $\forall i$), δηλ.

$$\text{Var}(\varepsilon_i^*) = \frac{\text{Var}(\varepsilon_i)}{[(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}]^2} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x_i}{\alpha_0 + \alpha_1 x_i} = 1, \quad \forall i$$

Επομένως, αυτό πλέον δεν υποφέρει από το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας και έτσι, μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο LS. *Ο εκτιμητής αυτός αναφέρεται ως Γενικευμένος Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων (GLS), καθώς στηρίζεται στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα.*

Παρουσίαση του GLS με τη βοήθεια γραμμικής άλγεβρας:

Πρώτα παρατηρήστε ότι η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διαταρακτικού όρου του παραπάνω υποδείγματος γράφεται ως

$$\mathbf{\Omega} \equiv \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_0 + \alpha_1 z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_0 + \alpha_1 z_N) \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, γράψτε το παραπάνω μετασχηματισμένο υπόδειγμα για όλες τις παρατηρήσεις i ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \frac{y_2}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots \\ \frac{y_N}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & \frac{x_{12}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & \cdots & \frac{x_{1K}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \frac{x_{22}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & \frac{x_{2K}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} & \frac{x_{N2}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} & \cdots & \frac{x_{NK}}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_N}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1K}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2K}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}^* & x_{N2}^* & \cdots & x_{NK}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_N^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

όπου

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{y}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$$

και

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1K}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2K}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}^* & x_{N2}^* & \cdots & x_{NK}^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

Η παραπάνω παρουσίαση του υποδείγματος σημαίνει ότι το μετασχηματισμένο υπόδειγμα προκύπτει ως:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{όπου}$$

$\mathbf{y}^* = \mathbf{P}\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\mathbf{X}^* = \mathbf{P}\mathbf{X}$, και η μήτρα μετασχηματισμού \mathbf{P} ορίζεται ως

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_0 + \alpha_1 z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_0 + \alpha_1 z_N) \end{bmatrix}^{-1/2} = \mathbf{\Omega}^{-1/2}$$

Ο διαταρακτικός όρος του μετασχηματισμένου υποδείγματος πληροί τις ακόλουθες κλασσικές ιδιότητες:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = E(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{P}E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\varepsilon}^{*'}) = E(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}') \\ &= \mathbf{P}E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{P}' = \mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' = \mathbf{\Omega}^{-1/2}\mathbf{\Omega}^{1/2}\mathbf{\Omega}^{1/2}\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

καθώς $\mathbf{P} = \mathbf{\Omega}^{-1/2}$.

Με βάση το μετασχηματισμένο υπόδειγμα, Ο GLS εκτιμητής δίδεται ως:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} = (\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*'}\mathbf{y}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{y}) = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y})$$

καθώς $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{\Omega}^{-1/2}\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{\Omega}^{-1}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτός είναι γραμμικός, αμερόληπτος και αποτελεσματικός -BLUE), καθώς και συνεπής σε μεγάλα δείγμα.

Με βάση τη σχέση $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*'}\boldsymbol{\varepsilon}^*$, η διακύμανση του $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$ βρίσκεται ως

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}) = E[(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} - \boldsymbol{\beta})'] = E\left[(\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*'}\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*'}\mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}'^*\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}'^*)\mathbf{X}^*(\mathbf{X}'\mathbf{X}^*)^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}'^*\mathbf{I}\mathbf{X}^*(\mathbf{X}'\mathbf{X}^*)^{-1} \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X}^*)^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.
\end{aligned}$$

Ο εφικτός (feasible) GLS εκτιμητής -FGLS: Στη πράξη τα στοιχεία της μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης $\boldsymbol{\Omega}$ (στο παράδειγμά μας, α_0 και α_1), δεν είναι γνωστά και θα πρέπει να εκτιμηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει σε πρώτο στάδιο, χρησιμοποιώντας τα κατάλοιπα του υποδείγματος με βάση τον εκτιμητή LS. Για το παράδειγμά μας, η βοηθητική παλινδρόμηση αυτή δίνεται ως:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + v_i,$$

όπου $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}$. Η μέθοδος αυτή παρέχει συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων α_0 και α_1 . Αντικαθιστώντας αυτές στη μήτρα $\boldsymbol{\Omega}$ (ή χρησιμοποιώντας τις για το μετασχηματισμό του υποδείγματος (9)) παίρνουμε τις GLS εκτιμήσεις των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος. *Ο GLS εκτιμητής αυτός αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως εφικτός (Feasible) GLS - FGLS. Αυτός παρέχει συνεπείς και ασυμπτωτικά αποτελεσματικές εκτιμήσεις αυτού, καθώς στηρίζεται σε συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων της συνάρτησης διακύμανσης.*

Στη πράξη έχει παρατηρηθεί ότι ο FGLS εκτιμητής απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων (πχ πάνω από $N=500$) για να εκτιμήσει τους συντελεστές ενός γραμμικού υποδείγματος ικανοποιητικά. Για αυτό στις εμπειρικές μελέτες τείνει να χρησιμοποιείται ο κλασικός LS εκτιμητής, όπου τα τυπικά σφάλματά του διορθώνονται εκτιμώντας τη διακύμανσή τους (διαγώνια στοιχεία μήτρας $\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$) με τη μέθοδο White