

Μαθηματικός Λογισμός II  
Φυλλάδιο ασκήσεων 11  
Διπλά ολοκληρώματα

29 Μαΐου 2017

1. Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο  $D$  που περικλείεται από τους θετικούς ημιάξονες και το επίπεδο με εξίσωση  $x + y + z = 1$

$$\int \int \int x^2 + y^2 + z^2 dz dy dx$$

**Απάντηση**  $\frac{13}{240}$

**Απάντηση**

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = \frac{1}{20}$$

2. Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα για τον μετασχηματισμό στις πολικές συντεταγμένες και τον αντίστροφο του. Τι παρατηρείτε;

**Απάντηση**

$$\det J = r, \quad \det J^{-1} = \frac{1}{r}$$

3. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\int \int (x^2 + y^2) dx dy$  στο χωρίο  $D$  που περικλείεται από τις καμπύλες

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad xy = 2, \quad xy = 4$$

**Απάντηση** Θέτω  $x^2 - y^2 = u$ ,  $xy = v$  και το αποτέλεσμα είναι 8.

4. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\int \int \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  στο χωρίο  $D$  που περικλείεται από τους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων  $\kappa$  ακτίνες  $R_1 = 2, R_2 = 3$

**Απάντηση** Θέτω πολικές και το αποτέλεσμα είναι  $\frac{38\pi}{3}$ .

5. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\int \int \ln(x^2 + y^2) dx dy$  στο χωρίο  $D$  που περικλείεται από τους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων  $\kappa$  ακτίνες  $R_1 = 2, R_2 = \sqrt{2}$  στο πρώτο τεταρτημόριο

**Απάντηση** Θέτω πολικές και το αποτέλεσμα είναι  $\pi \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}$ .

6. Να υπολογιστεί το εμβαδόν με χρήση διπλού ολοκληρώματος του χωρίου ανάμεσα στις καμπύλες

$$y = x^2, \quad y = x + 2$$

**Απάντηση**

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν με χρήση διπλού ολοκληρώματος του χωρίου που σχηματίζει ο λημνίσκος

$$r^2 = 4 \cos(2\theta)$$

**Απάντηση**

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} dr d\theta = 4$$