

Μαθηματικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων 8
Ακρότατα

5 Μαΐου 2017

1. Εάν $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ και $V = V(x, y)$ να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$$

Απάντηση

Ξεκινάμε από το 2ο μέλος, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

2. Έστω η συναρτησιή $f(x, y, z) = xyz^2$ με $x = r + s + t, y = s^2, z = t$.
Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

Απάντηση

Με τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = s^2 t^2 \quad \frac{\partial f}{\partial s} = s^2 t^2 + (r + s + t)t^2 2s \quad \frac{\partial f}{\partial t} = s^2 t^2 + 2(r + s + t)s^2 t$$

3. Να εξεταστούν οι παρακάτω συναρτήσεις για μέγιστες - ελάχιστες τιμές:

α) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

β) $g(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

Απάντηση

α) Ελάχιστο για $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$

β) Μέγιστο για $x = -1, y = -1$. Σταγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων.

4. Να βρεθούν τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $z = f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x = 0, y = 0, x + y = 120$ στο 1ο τεταρτημόριο.

Απάντηση

Ολικό μέγιστο στο A(40, 40), ίσο με 4800. Στο σύνορο τα σημεία B(60,0) και Γ(0,60) Δ (60,60) δεν είναι ολικά ακρότατα.

5. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$.

Απάντηση

Μέγιστο στο A(-1, -2). Ελάχιστο στο B(1,2).