

Μαθηματικός Λογισμός II

Tutorial 3: Ακολουθίες Συναρτήσεων, Διανύσματα

17 Μαρτίου 2017

1. Δείξτε ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για $x \in I \subset \mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} f_n(x) \rightarrow f(x) &\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, : \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \end{aligned}$$

2. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f_n(x) \rightarrow 0$.

Απάντηση: Εφαρμόστε το κριτήριο της άσκησης 1.

3. Να αποδείξετε τον νόμο των ημιτόνων με την χρήση διανυσμάτων (εξωτερικό γινόμενο).
4. Να βρεθεί ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται απο τα σημεία $A(1,2,3)$, $B(-3,5,1)$ και $\Gamma(0,6,4)$.
5. Εάν $|a| = |b| = 1$ $\widehat{(a, b)} = \theta$ να αποδείξετε ότι $|a - b| = 2|\sin(\frac{\theta}{2})|$
6. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{u} = (3, 4, 5)$, $\vec{v} = (4, -5, -3)$

Απάντηση: $117, 4^\circ$