Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φροντιστήριο 2

11 Μαρτίου 2017

α) Αναπτύξτε την $f(x) = x$, $0 < x < 2$ σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων
β) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval τα $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,i+1)^4}$ και $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$.
Απάντηση $L = 2$.
Για την σειρά ημιτόνων έχουμε ότι

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx = \left\{x\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - 1\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\right\}\right|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi).$$

Συνεπώς,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \cdots\right)$$

Για την σειρά συνημιτόνων έχουμε

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx = \left\{x\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - 1\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\right\}\right|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

για $n \neq 0$. Μπορούμε να δείξουμε ότι $a_0 = 2$.
Συνεπώς,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Η ταυτότητα του Parseval για την σειρά συνημιτόνων δίνει

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos(n\pi) - 1)^2$$

(προσοχή για την ταυτότητα χρησιμοποιώ την σειρά για την άρτια επεκταση σε όλο το $[-2, 2]$.)
Αυτό μας δίνει ότι

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

Αν ονομάσουμε

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4}\cdots \\ &= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\,S \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$S = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{2^4}\,S \implies S = \frac{\pi^4}{90}$$