

Μαθηματικός Λογισμός II  
 Φυλλάδιο ασκήσεων 7  
 Διανυσματικές συναρτήσεις και καμπύλες στον χώρο

17 Ιουνίου 2010

1. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{5}t)$ . Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και το μήκος τόξου για  $0 \leq t \leq \pi$ .  
**Απάντηση :**  $r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5}) \Rightarrow T = \frac{1}{3}(-2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5})$   
 $s = 3\pi$

2. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (\frac{2k^2}{3}t, kt^2, t^3)$ . Να δείξετε ότι όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της σχηματίζουν σταθερή γωνία με το διάνυσμα  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ , την οποία και να υπολογίσετε.  
**Απάντηση :**  $r'(t) = (\frac{2k^2}{3}, 2kt, 3t^2)$ ,  $\cos\phi = \frac{r'(t) \cdot u}{|r'(t)| \cdot |u|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{1+t^2})$ . Να βρεθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 r(t) dt$ .  
**Απάντηση :**  $\int_0^1 (\frac{2}{\sqrt{1-t^2}})\vec{i} + (\frac{\sqrt{3}}{1+t^2})\vec{k} dt = (\pi, 0, \frac{\pi\sqrt{3}}{4})$

4. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της και το κάθετο επίπεδο στο σημείο  $t = 1$ .  
**Απάντηση :**  $r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ ,  $r'(1) = (1, 2, 3)$ ,  $r(1) = (1, 1, 1)$ , επομένως  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$   
 κάθετο επίπεδο :  $(x-1)1 + (y-1)2 + (z-1)3 = 0$

5. Να βρεθεί η παράμετρος μήκους τόξου με σημείο αναφοράς το  $t = 0$ , για την καμπύλη

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

**Απάντηση :**  $s = \int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2} d\tau = \sqrt{3}(e^t - 1) \Rightarrow t = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{3}})$

6. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης κατά την χρονική στιγμή  $t = 1$ , για ένα σώμα που κινείται πάνω στην καμπύλη  $r(t) = (3t + 1, \sqrt{3}t, t^2)$ .  
**Απάντηση :**  $r'(t) = (3, \sqrt{3}, 2t)$ ,  $r''(t) = (0, 0, 2)$  επομένως  $\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

7. Να βρεθούν τα διανύσματα T, N και η καμπυλότητα  $\kappa$  για την καμπύλη του επιπέδου :  $r(t) = (t, \ln(\cos t))$ .  
**Απάντηση :**  $r'(t) = (1, \tan t)$ ,  $|r'(t)| = \frac{1}{\cos(t)} \Rightarrow T = (\cos t, -\sin t)$ ,  $N = (-\sin t, -\cos t)$ ,  $\kappa = \cos t$

8. Έστω τα σημεία A, B, Γ με διανύσματα θέσης  $(9i - 2j + k)$ ,  $(6i + 2j + 6k)$ ,  $(3i + pj + qk)$  αντιστοίχως. Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της ευθείας AB.

β) Εάν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB, να βρεθούν τα  $p, q$ .

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες την γωνία μεταξύ  $\vec{O\Gamma}$  και  $\vec{OB}$ .

δ) Εάν Δ είναι σημείο της AB με OΔ κάθετο στην AB, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ.

**Απάντηση :** α)  $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-6}{5}$

β)  $p = 6, q = 11$

γ)  $\cos\phi = 0.881 \Rightarrow \phi = 56.5^\circ$

δ)  $\vec{O\Delta} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (-3t + 6)(-3) + (4t + 2)4 + (5t + 6)5 = 0 \Rightarrow t = -0.4$ .

Επομένως,  $\Delta = (7.2, 0.4, 4)$