

Μαθηματικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων 9
Διπλά- πολλαπλά Ολοκληρώματα

1 Ιουνίου 2010

1. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int \frac{1}{(x+y)^3} dx dy$$

στο χωρίο D , όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1\}$

Απάντηση

Απλό ως προς x , $= \frac{1}{36}$.

2. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int (x^2 + y) dx dy$$

στο χωρίο D , όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq \frac{x^2}{2}, y \leq \sqrt{2x}\}$

Απάντηση

Απλό ως προς x , $= \frac{18}{7}$.

3. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

Απάντηση

Αλλάζουμε την σειρά ολοκλήρωσης, βρίσκοντας το χωρίο. $\frac{e^9 - 1}{6}$.

4. Να υπολογιστεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = x + 2, \quad x = -y^2$$

Απάντηση

$$E = \int \int_D dx dy = \frac{9}{2}$$

5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int (x + y) dx dy$$

στο χωρίο D , όπου $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\}$

Απάντηση Θέτω $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$ και έτσι, $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, \det(J_T) = \frac{1}{2v}$. Το αποτέλεσμα είναι $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$

6. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int (x^2 + y^2) dx dy$$

στο χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad xy = 2, \quad xy = 4$$

Απάντηση Θέτω $x^2 - y^2 = u$, $xy = v$ και το αποτέλεσμα είναι 8.

7. Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz dz dy dx$$

Απάντηση $\frac{13}{240}$

8. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint \frac{y + 2x^2}{(x^2 + xy)} dx dy$$

στο χωρίο D , όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x^2 + 3, y = -x^2 + 8, y = 0, y = 2x\}$

Απάντηση

Θέτουμε $u = y + x^2, v = \frac{y}{x}$. Τότε, $\det J = \frac{x^2}{2x^2+y}$ και παίρνουμε $I = 5 \ln 3$.