

Μαθηματικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων 1
Ομοιόμορφη σύγκλιση- Διανυσματικές συναρτήσεις

2 Μαρτίου 2010

1. Δείξτε ότι $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x)$ για $x \in I \subset \mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

2. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \max(n - n^2 |x - \frac{1}{n}|, 0)$, $f_n(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$.
(α) Σχεδιάστε τους πρώτους n όρους της ακολουθίας.
(β) Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει στην $f(x) = 0$.
(γ) Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη, ναι ή όχι και γιατί.

3. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει στην $f(x) = 0$ αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

4. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} 0$.

5. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$ συγκλίνει απόλυτα για $x \in \mathbb{R}$.

6. Έστω η καμπύλη $r(t) = (t \cos t, t \sin t)$. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα για $t = \frac{\pi}{3}$.

7. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{t^2 + 1}i + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}j, \quad r(0) = i + j$$

8. Ένα σώμα κινείται πάνω στην καμπύλη $r(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)$. Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το σώμα από $t = 0$ έως $t = \frac{2\pi}{3}$.

9. Εάν ισχύει $|r(t)| = c$ να δείξετε ότι $r(t)r'(t) = 0$