Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2014**
Σημειώσεις 1-12-14
Μ. Ζαζάνης

1 Πραγματικές Συναρτήσεις και Όρια

Έστω $S \subset \mathbb{R}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το S και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο $T := \{f(x) : x \in S\}$ ονομάζεται πεδίο τιμών της συνάρτησης f.

Ορισμός 1. *Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) εκτός, ενδεχομένως, από κάποιο σημείο $\xi \in (a, b)$. Θα λέμε ότι η f τείνει στον πραγματικό αριθμό $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $f(x) \to l$ όταν $x \to \xi$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ αν*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - l| < \epsilon \text{ όταν } 0 < |x - \xi| < \delta,\ x \in (a, b).$$

Ορισμός 2. *Η συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι* συνεχής στο σημείο *$\xi \in (a, b)$ αν $f(x) \to f(\xi)$ όταν $x \to \xi$.*

Θεώρημα 1. *Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (a, b), εκτός ενδεχομένως από κάποιο σημείο $\xi \in (a, b)$. Τότε $f(x) \to l$ όταν $x \to \xi$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία σημείων $\{x_n\}$ στο διάστημα (a, b) τέτοιων ώστε $x_n \neq \xi$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to \xi$ όταν $n \to \infty$, ισχύει ότι $f(x_n) \to l$ όταν $n \to \infty$.*

Όρια από τα δεξιά και από τα αριστερά: Έστω μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (a, b). Θα λέμε ότι

Το όριο της f όταν το x τείνει στο b από τα αριστερά είναι το l, και θα γράφουμε $\lim_{x\to b-} f(x) = l$, αν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - l| < \epsilon \text{ όταν } b - \delta < x < b.$$

Το όριο της f όταν το x τείνει στο a από τα δεξιά είναι το l, και θα γράφουμε $\lim_{x\to a+} f(x) = l$, αν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - l| < \epsilon \text{ όταν } a < x < x + \delta.$$

Άπειρα όρια. Θα λέμε ότι $f(x) \to +\infty$ όταν $x \to \xi+$ αν

$$\forall H > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } f(x) > H \text{ όταν } \xi < x < \xi + \delta.$$

Θα λέμε ότι $f(x) \to l$ όταν $x \to +\infty$ αν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists H > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - l| < \epsilon \text{ όταν } x > H.$$

2 Συνέχεια

Ορισμός 3. *Μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a, b) αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος. Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ αν είναι συνεχής στο (a, b), συνεχής από τα δεξιά στο a και συνεχής από τα αριστερά στο b.*

Θεώρημα 2 (Διατήρηση Προσήμου)**.** *Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο σημείο c με $f(c) \neq 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η $f(x)$ να έχει το ίδιο πρόσημο με την $f(c)$ για κάθε $x \in (c-\delta, c+\delta)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(c) > 0$. (Η περίπτωση $f(c) < 0$ είναι παρόμοια.) Αφού η f είναι συνεχής στο σημείο c, διαλέγοντας $\epsilon = \frac{1}{2}f(c)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$| f(x) - f(c) |< \frac{1}{2}f(c) \quad \text{όταν } 0 < |x - c| < \delta$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, $-\frac{1}{2}f(c) < f(x) - f(c) < \frac{1}{2}f(c)$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(x)$, και επομένως αυτό συνεπάγεται ότι

$$0 < \frac{1}{2}f(c) < f(x) <| f(x) - f(c) |< \frac{1}{2}f(c) \quad \text{όταν } 0 < |x - c| < \delta.$$

Συνεπώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (c - \delta, c + \delta)$. □

Θεώρημα 3 (Bolzano)**.** *Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει ότι $f(a)f(b) < 0$. Υπάρχει τότε $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Ενδέχεται να υπάρχουν πολλές τιμες στο διάστημα (a, b) όπου η f μηδενίζεται. Εμείς αρκεί να βρούμε μια από αυτές και θα βρούμε την μεγαλύτερη. Έστω $S := \{x : x \in [a, b],\ f(x) \leq 0\}$. Το σύνολο S δεν είναι κενό επειδή $a \in S$. Επίσης το S είναι φραγμένο με άνω φράγμα το b. Συνεπώς έχει ελάχιστο άνω φράγμα: $c := \sup S$. Θα δείξουμε ότι $f(c) = 0$ με την εις άτοπο αναγωγή.

Αν υποθέσουμε $f(c) > 0$. Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα διατήρησης προσήμου, υπάρχει $\delta > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) > 0$ για $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Δεδομένου ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (c, b]$ αφού $c = \sup S$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (c - \delta, b]$ πράγμα που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $c = \sup S$.

Αν υποθέσουμε ότι $f(c) < 0$ τότε, πάλι από το Θεώρημα διατήρησης προσήμου, υπάρχει $\delta > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) < 0$ για $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Αυτό όμως σημαίνει ότι υπαρχουν στοιχεία του S που είναι μεγαλύτερα από το c, πράγμα που είναι άτοπο. □

Μέγιστο και Ελάχιστο Έστω $S \subset \mathbb{R}$ και $f : S \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f έχει σημείο μεγίστου στο $c \in S$ αν $f(c) \geq f(x)$ για κάθε $x \in S$. Η f έχει σημείο ελαχίστου στο $d \in S$ αν $f(d) \leq f(x)$ για κάθε $x \in S$.

Θεώρημα 4. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ δηλαδή υπάρχει $C>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq C$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη. Με την εις άτοπον απαγωγή: Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_n \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $|f(x_n)| > n$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι φραγμένη και επομένως, από το θεώρημα Bolzano–Weirstrass έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $\{x_{k_n}\}$ με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c \in [a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο c, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(c)|<1$ για κάθε $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Αλλά $|f(x)-f(c)|<1$ συνεπάγεται ότι $|f(x)| \leq |f(c)|+1$. Όμως, αφού $x_{k_n} \to c$ όταν $n \to \infty$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x_n - c| < \delta$ όταν $n \geq n_0$. Επομένως αν διαλέξουμε $n > |f(c)|+1$ και ταυτόχρονα $n \geq n_0$ θα ισχύει ότι $x_n \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$ και επομένως θα πρέπει $|f(x_{k_n})| \leq |f(c)|+1$ ενώ ταυτόχρονα $|f(x_{k_n})| \geq k_n \geq n > |f(c)|+1$ το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 5. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Τότε υπάρχει $c \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ και $d \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(d) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$.*

Θεώρημα 6 (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)**.** *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $x_1 < x_2$ δύο σημεία στο $[a,b]$ τέτοια ώστε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_2)$ στο διάστημα (x_1, x_2).*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $f(x_1) < f(x_2)$ και έστω $k \in (f(x_1), f(x_2))$. Η συνάρτηση $g(x) := f(x) - k$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$. Συνεπώς, από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ που σημαίνει ότι $f(\xi) = k$. □

3 Παράγωγοι και Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός 4. *Μια συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη *στο σημείο $\xi \in (a,b)$ αν υπάρχει το όριο*

$$f'(\xi) := \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Η τιμή $f'(\xi)$ ονομάζεται παράγωγος *της f στο σημείο ξ.*

Μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος I θα ονομάζεται παραγωγίσιμη στο I. Η συνάρτηση $f' : I \to \mathbb{R}$ η οποία σε κάθε σημείο x του I παίρνει την τιμή $f'(x)$ θα ονομάζεται *παράγωγος* της f. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους ανωτέρας τάξης. Για παράδειγμα, αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in I$ τότε η δεύτερη παράγωγος της f στο ξ ορίζεται ως

$$f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Θεώρημα 7. *Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο c τότε είναι συνεχής στο c.*

Πρόταση 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g, ορισμένες στο ανοικτό διάστημα I είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο σημείο $\xi \in I$ και αν $a, b \in \mathbb{R}$ τότε*

- *Η παράγωγος της συνάρτησης $af(x) + bg(x)$ στο σημείο ξ υπάρχει και είναι ίση με*
$$af'(\xi) + bg'(\xi).$$
- *Η παράγωτος της συνάρτησης $f(x)g(x)$ στο σημείο ξ υπάρχει και είναι ίση με*
$$f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).$$
- *Υπό την προϋπόθεση ότι $g(\xi) \neq 0$, η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)/g(x)$ στο σημείο ξ υπάρχει και είναι ίση με*
$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

Ορισμός 5. *Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα I.*

Το σημείο $c \in I$ ονομάζεται σημείο τοπικού μεγίστου της f αν υπάρχει $h > 0$ τέτοιο ώστε $f(c) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (c-h, c+h)$.

Αντίστοιχα, το $c \in I$ ονομάζεται σημείο τοπικού ελαχίστου της f αν υπάρχει $h > 0$ τέτοιο ώστε $f(c) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (c-h, c+h)$.

Θεώρημα 8. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το σημείο $c \in (a,b)$ είναι τοπικό σημείο μεγίστου ή τοπικό σημείο ελαχίστου τότε $f'(c) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $f'(c) > 0$. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση
$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{αν} \quad x \in I,\ x \neq c \\ f'(c) & \text{αν} \quad x = c \end{cases}$$
είναι συνεχής και αφού $g(c) = f'(c) > 0$ αυτό σημαίνει ότι $g(x) > 0$ σε κάποιο διάστημα $(c-h, c+h)$ γύρο από το c. Επομένως αν $c - h < x_1 < c$ τότε $g(x_1) = \frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} > 0$ που σημαίνει ότι $f(x_1) < f(c)$ (εφόσον $x_1 < c$). Παρομοίως, αν $c < x_2 < c+h$ τότε πάλι $g(x_2) = \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} > 0$ που σημαίνει ότι $f(x_2) > f(c)$. Συμπεραίνουμε ότι αν $f'(c) > 0$ τότε το c δεν μπορεί να είναι ούτε σημείο τοπικού μεγίστου, ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι αν $f'(c) < 0$ τότε το c δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου. Κατά συνέπεια θα πρέπει να ισχύει $f'(c) = 0$. □

Θεώρημα 9 (Rolle)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει $c \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = 0$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ παίρνει σε κάποια σημεία ξ_1 και ξ_2 αντίστοιχα την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, M και m. Αν $\xi_1 = a$ και $\xi_2 = b$ (ή αντίστροφα) τότε, επειδή $f(a) = f(b)$, θα πρέπει να ισχύει $m = M$ και επομένως η f θα είναι σταθερά στο $[a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι $f'(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ και το θεώρημα ισχύει.

Αν το ξ_1 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος τότε από το προηγούμενο θεώρημα θα ισχύει ότι $f'(\xi_1) = 0$ αφού το ξ_1 θα είναι τοπικό (και ολικό) ελάχιστο. Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται και αν το ξ_2 είναι εσωτερικό σημείο. □

Θεώρημα 10 (Μέσης Τιμής). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(c) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)) \quad \text{για } x \in [a, b].$$

Παρατηρούμε ότι για η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

και ότι $g(a) = g(b) = 0$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στην g, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $g'(c) = 0$ δηλαδή

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

□

Μια σημαντικότατη συνέπεια του θεωρήματος της Μέσης Τιμής είναι η ακόλουθη πρόταση. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ τότε η f είναι σταθερή στο I. Πράγματι, αν $x < y$, $x, y \in I$, τότε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0, \quad \text{αφού η παράγωγος είναι παντού μηδέν.}$$

Επομένως, για κάθε $x, y \in I$ $f(y) = f(x)$ πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι σταθερή στο I.

Θεώρημα 11 (Μέσης Τιμής Cauchy). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτησεις συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι $g(b) \neq g(a)$ και ότι $g'(x) \neq 0$ για $a < x < b$. Τότε υπάρχει υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \;=\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $g(b) \neq g(a)$ διότι, αν ήταν ίσα τότε, από το θεώρημα του Rolle θα υπήρχε $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, κάτι που εξ υποθέσεως δεν συμβαίνει. Επομένως $g(b) - g(a) \neq 0$ και ο παρονομαστής της (1) δεν μηδενίζεται. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $F(x) := f(x) - hg(x)$ όπου $h \in \mathbb{R}$. Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Επιλέγουμε το h έτσι ώστε να ισχύει $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - hg(a) = f(b) - hg(b) = F(b) \quad \text{το οποίο συνεπάγεται} \quad h = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή αυτή του h είναι εφικτή με την έννοια ότι $g(b) \neq g(a)$ και επομένως ο παρονομαστής $g(b) - g(a)$ δεν μηδενίζεται. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $g(b) = g(a)$, τότε θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)$ ενώ σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος $g'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (a, b)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle για την F συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = f'(\xi) - hg'(\xi) = 0$ το οποίο δίνει την (1). $\square$