

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Στατιστικής
Μαθηματικός Λογισμός 1
Διδάσκοντες : Μ. Ζαζάνης - Ν. Φράγκος - Δ. Παππάς
25-8-2011

Θέμα 1. (Μονάδες 20) Να δικαιολογήσετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και να υπολογίσετε τα όριά τους.

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}, \quad b_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \quad c_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n}, \quad d_n = n^{2/3} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Θέμα 2. (Μονάδες 20) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές και αιτιολογήστε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n - \frac{1}{2})}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4/3)^n}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log(n+1)}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Θέμα 3. (Μονάδες 10) Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα Taylor των παρακάτω συναρτήσεων

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}, \quad g(x) = \frac{x^3}{1-x}.$$

Θέμα 4. (Μονάδες 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} \quad \int_{-6}^{-3} \frac{1}{x^2 + 12x + 45} dx \quad \int_1^{\sqrt{3}} \text{Arctan} x dx \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

Θέμα 5. (Μονάδες 30)

1. Να αποδείξετε ότι $x \leq \text{Arcsin} x \leq 2x, \forall x \in [0, 1]$
2. Δίνεται η καμπύλη που ορίζεται πεπλεγμένα από την σχέση $4x^2y + 2xy^3 + y = 3$.
Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της και της κάθετης ευθείας στο σημείο $(-1, 1)$.