ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ- ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Μερικοί τύποι ολοκλήρωσης:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = Arc\tan x + c \qquad \int \frac{1}{k^2+x^2}dx = \frac{1}{k}Arc\tan\frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arc\sin x + c_1 = -Arc\cos x + c_2$$

Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

• Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\sin x, \cos x)dx$, οπου R = ρητή συνάρτηση των sinx, cosx. :

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση: $\tan\frac{x}{2} = u$ (Weierstrass) και έχουμε:

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

• Ολοκληρώματα της μορφής $\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}$:

Α) Οταν ν, μ είναι άρτιοι, χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Β) Όταν ενας εκθέτης είναι περιττός, πχ. ν = 2ρ+1, τότε:

$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \int \sin^{\mu} x \cos^{2\rho} x \cos x dx$ και θέτουμε sinx = u, οπότε,

$\cos^{2\rho} x = 1 - \sin^{2\rho} x = 1 - u^{\rho}$ και το cosx απλοποιείται.

Ολοκληρώματα της μορφής $\int (\sqrt{bx^2 - a})dx$ ή $\int (\sqrt{bx^2 + a})dx$

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cos t}$, or $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sin t}$ στη $1^{η}$ περίπτωση , και την αντικατάσταση $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\tan t$ στη $2^{η}$ περίπτωση.

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x).$$

Το ερώτημα είναι: Ποιο θα ολοκληρώσουμε, ώστε να εμφανιστεί το g'(x)'?
Η σειρά προτεραιότητας είναι : $e^x, \sin x \ or \ \cos x, \ldots$ και ποτέ δεν είναι το ln(x).
(Το ίδιο και για τα $\sin^{-1}(x), \cos^{-1}(x)$.)

Ειδική περίπτωση: $\int e^x \sin x dx$: μετά απο 2 παραγοντικές ολοκληρώσεις, επιστρέφουμε στο σημείο εκκίνησης. Έτσι, θέτουμε $\int e^x \sin x dx = I \Rightarrow I = (.....) - I$ και λύνουμε ως προς I.

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων:

• Όταν ο αριθμητής έχει δύναμη μεγαλύτερη η ίση με του παρονομαστή, χρησιμοποιούμε διαίρεση πολυωνύμων
• Όταν ο αριθμητής έχει δύναμη μικρότερη του παρονομαστή χρησιμοποιούμε τα μερικά κλάσματα, αφού παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή..
• Εάν ο παρονομαστής δεν παραγοντοποιείται, (πχ. Δ< 0) τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους της Arctan(x).