Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2012**
Ασκήσεις στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών. **Μ. Ζαζάνης**

Πρόβλημα 1. *Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και αν ναι να υπολογίσετε τα όριά τους.*

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2}, \quad b_n = \frac{3n^2+2n+1}{4n+2}, \quad c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad d_n = \frac{n3^n+2}{4^n+1},$$
$$e_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad f_n = \sqrt[n]{5}, \quad g_n = \sqrt[n]{n}$$

Λύση:

$$a_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

$$b_n = n\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n2}}{4+\frac{2}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

$$c_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0.$$

$$d_n = \frac{n\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^{-n}}{1+4^{-n}}.$$

Δεδομένου ότι $4^{-n} \to 0$ και $n\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ όταν $n \to \infty$, $d_n \to 0$.

$$e_n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Ισχύει ότι $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$. (Πρόκειται για υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.) Συνεπώς, αφού η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(x)}$ είναι συνεχής, $e_n \to \sqrt{e} = e^{1/2}$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει και να υπολογίσουμε το όριό της μπορούμε να εξετάσουμε τον φυσικό λογάριθμο. $\log f_n = \frac{\log 5}{n}$. Είναι προφανές ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\log 5}{n} = 0$ και επομένως, λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης, $\sqrt[5]{n} = e^{\log 5/n} \to e^0 = 1$ όταν $n \to \infty$.

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η ακόλουθη. Παρατηρώ ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $f_n > 1$ και επομένως $f_n - 1 > 0$. Από το διωνυμικό θεώρημα

$$5 \;=\; (1+(f_n-1))^n = 1 + n(f_n-1) + \frac{n(n-1)}{2}(f_n-1)^2 + \cdots + (f_n-1)^n \geq n(f_n-1).$$

Η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι όλοι οι όροι που παρελήφθησαν είναι θετικοί. Επομένως, για κάθε n,

$$0 < f_n - 1 < \frac{5}{n}$$

και από το θεώρημα του εγκιβωτισμού προκύπτει ότι $f_n - 1 \to 0$ ή ισοδύναμα $f_n \to 1$.

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε και την ακολουθία g_n: Ισχύει ότι $g_n > 1$ για $n \geq 2$ (αφού, αν είχαμε $0 \leq g_n \leq 1$ τότε θα ίσχυε $g_n^n = n \leq 1$ που είναι άτοπο).

$$n \;=\; (1+g_n-1)^n = 1+n(g_n-1)+\frac{n(n-1}{2}(g_n-1)^2+\cdots+(g_n-1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(g_n-1)^2.$$

Η ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι οι όροι που παραλείπονται είναι θετικοί. Παρατηρείστε ότι εδώ κρατήσαμε διαφορετικό όρο του διωνυμικού αναπτύγματος. Ισχύει επομένως ότι

$$\frac{2}{n-1} \geq (g_n-1)^2, \quad n \geq 2$$

και συνεπώς

$$0 \leq g_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2$$

Αφήνοντας το n να τείνει στο άπειρο στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του εγκιβωτισμού, δεδομένου ότι $\sqrt{2/(n-2)} \to 0$, βλέπουμε ότι $g_n \to 1$.

Πρόβλημα 2. *Να δείξετε ότι οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και να υπολογίσετε τα όριά τους*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \qquad |x|<1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

<u>Λύση:</u> Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της πρώτης σειράς. Παρατηρώ ότι

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

και παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνω

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = -\frac{(n+1)x^n}{1-x}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας το δεξί και το αριστερό μέλος της σχέσης με x έχω

$$s_n := x+2x^2+\cdots+nx^n = -\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}+x\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Αφού $|x|<1$ ισχύει ότι $|x|^n \to 0$ και $n|x|^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \lim_{n\to\infty} s_n = -\lim_{\to\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}+\lim_{n\to\infty} x\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Έστω $t_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της δεύτερης σειράς. Ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

και επομένως $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ ή

$$\begin{aligned}
2t_n &= 1 - \frac{1}{3} \\
&\quad + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&\quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
&\quad + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\
&\quad + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \\
&\quad + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \\
&\quad + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\
&\quad + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Μετά τις απαλοιφές,

$$2t_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$