Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φεβρουάριος 2012**

Μ. Ζαζάνης

1 Τα αθροίσματα μερικών εναλλασσουσών σειρών

Το θεώρημα του Leibniz μας εγγυάται την ύπαρξη των αθροισμάτων των εναλλασσουσών σειρών της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ όταν η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία και $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Δεν μας δίνει όμως τον τρόπο να υπολογίσουμε το ακριβές τους άθροισμα. Αυτό πρέπει να γίνει (στις περιπτώσεις που είναι δυνατό) με άλλες μεθόδους. Εδώ θα υπολογίσουμε τα αθροίσματα μερικών από τις απλούστερες εναλλάσσουσες σειρές.

1.1 Η σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t}. \tag{1}$$

(Γεωμετρική πρόοδος με λόγο $-t$.) Ξαναγράφουμε τη σχέση αυτή ως

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n - \frac{1}{1+t} = -\frac{(-t)^{n+1}}{1+t}. \tag{2}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\int_0^x 1dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n dt - \int_0^t \frac{1}{1+t} dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt. \tag{3}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_1^{1+x} \frac{1}{t} dt = \log(1+x) \tag{4}$$

προκύπτει η εξισωση

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt. \tag{5}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $x > 0$. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$-\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) \le \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt. \tag{6}$$

Για κάθε $t \geq 0$ $\frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^n$ και επομένως

$$\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{7}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (7) στην σχέση (6) παίρνουμε την ανισότητα

$$-\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{8}$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι $x \in [0,1]$ τότε $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Συνεπώς ισχύει η ανισότητα

$$-\frac{1}{n+1} \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) \leq \frac{1}{n+1} \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{9}$$

Αν αφήσουμε το n να πάει στο άπειρο στην παραπάνω σχέση παίρνουμε το ανάπτυγμα

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{10}$$

Η παραπάνω σχέση, για $x = 1$ δίνει το άθροισμα της εναλλάσσουσας σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2. \tag{11}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το x είναι αρνητικό και συγκεκριμένα ότι $x \in (-1, 0)$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην (5) έχουμε

$$\left| x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \right| \tag{12}$$

Όταν $x \in (-1, 0)$ ισχύει ότι

$$\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt \leq \int_0^{|x|} \frac{t^{n+1}}{1-|x|}dt = \frac{1}{1-|x|} \int_0^{|x|} t^{n+1}dt = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}.$$

Συνεπώς

$$\left| x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \log(1+x) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}, \qquad -1 < x < 0 \tag{13}$$

και, δεδομένου ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)} = 0$ γιά κάθε $|x| < 1$ συμπεραίνουμε ότι το ανάπτυγμα (10) ισχύει για κάθε $x \in (-1, 1]$. Για την περίπτωση που το x είναι αρνητικό είναι συχνά χρήσιμο να γράφουμε την σχέση (10) ως

$$\log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}, \qquad 0 \leq y < 1. \tag{14}$$

(Θέσαμε $y = -x \geq 0$.)

Για παράδειγμα, από τις σχέσεις (10) και (14) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n} &= \frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}-\frac{1}{4\cdot 16}+\frac{1}{5\cdot 32}-\frac{1}{6\cdot 64}+\cdots = \log(1+\frac{1}{2}) \\ &= \log 3/2 = \log 3 - \log 2 \approx 0.4056\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}+\frac{1}{5\cdot 32}+\frac{1}{6\cdot 64}+\cdots = -\log(1-\frac{1}{2}) \\ &= -\log 1/2 = \log 2 \approx 0.6931.\end{aligned}$$

2 Η σειρά $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

Η σειρά αυτή μελετήθηκε επίσης από το Leibniz. Γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, προκειμένου όμως να υπολογίσουμε το άθροισμά της βασιζόμαστε πάλι στη γεωμετρική πρόοδο. Ξεκινάμε με την σχέση

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-t^2)^n = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

η οποία είναι το άθροισμα γεωμετρικής προόδου με λόγο $-t^2$ και ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι $x > 0$ παίρνουμε

$$\int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^6 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x$ έχουμε ότι

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \arctan x = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt. \tag{15}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\left| x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \arctan x \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \right|. \tag{16}$$

Για $x \in [-1, 1]$ ισχύει ότι

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}. \tag{17}$$

Από τις (16) και (17) βλέπουμε ότι

$$\left| x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \arctan x \right| \leq \frac{1}{2n+3} \to 0 \ \text{ όταν } n \to \infty, \text{ για } |x| \leq 1. \tag{18}$$

Συνεπώς, έχουμε το ανάπτυγμα

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x, \qquad |x| \leq 1. \tag{19}$$

Αν θέσουμε $x = 1$ στην (19) παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3 Ολοκληρωτικό Κριτήριο για την Σύγκλιση των Σειρών

Θεώρημα 1. *Έστω f μια θετική, φθίνουσα συνάρτηση, ορισμένη για κάθε $x \geq 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad \textit{και} \qquad t_n := \int_1^n f(x)dx.$$

Τότε οι ακολουθίες $\{s_n\}$ και $\{t_n\}$ είτε συγκλίνουν και οι δύο είτε αποκλίνουν και οι δύο.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

(Για παράδειγμα, στο σχήμα $n = 9$ και $\sum_{k=2}^{9} f(k)$ είναι το εμβαδόν των κίτρινων ορθογωνίων ενώ $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ είναι το εμβαδόν των κίτρινων ορθογωνίων μαζί με τα πράσινα.) Δεδομένου ότι $\sum_{k=2}^{n} f(k) = s_n - f(1)$, έχουμε ότι

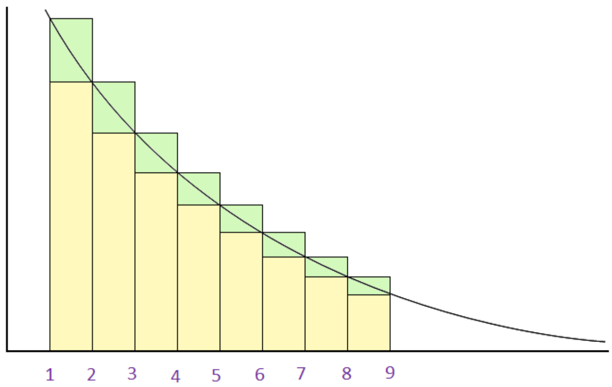
$$s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}.$$

Αφού και οι δύο ακολουθίες είναι αύξουσες, οι ανισότητες αυτές δείχνουν ότι είτε και οι δύο είναι άνω φραγμένες, είτε και οι δύο δεν είναι. □

Παράδειγμα 1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$. Πράγματι, αν πάρουμε $f(x) = x^{-\alpha}$ τότε

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{αν } \alpha \neq 1 \\ \log n & \text{αν } \alpha = 1 \end{cases}$$

Από την παραπάνω έκφραση βλέπουμε ότι αν $\alpha > 1$ η $\{t_n\}$ συγκλίνει ενώ αν $\alpha \leq 1$ η $\{t_n\}$ αποκλίνει, και σύμφωνα με το ολοκληρωτικό κριτήριο το ίδιο κάνει και η $\{s_n\}$.



Παράδειγμα 2. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$. (Παρατηρείστε ότι εδώ το άθροισμα αρχίζει από $n = 2$ ώστε να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής.) Αν $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ τότε

$$\begin{aligned} t_n &= \int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int_2^n \frac{d\log x}{(\log x)^\alpha} \\ &= \int_{\log 2}^{\log n} \frac{dy}{y^s} = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{αν } \alpha \neq 1, \\ \log\log n - \log\log 2 & \text{αν } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Από την παραπάνω έκφραση είναι και πάλι προφανές ότι η $\{t_n\}$ συγκλίνει αν $\alpha > 1$ ενώ απολίνει αν $\alpha \leq 1$ και επομένως το ίδιο κάνει και η $\{s_n\}$.

4 Ο τύπος του Stirling

Ο τύπος του Stirling επιτρέπει τον προσεγγιστικό υπολογισμό του $n!$ για μεγάλες τιμές του n χωρίς να χρειάζεται ο πολλαπλασιασμός των n πρώτων φυσικών. Το περιεχόμενό του είναι η ακόλουθη *ασυμπτωτική* σχέση:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1 \tag{20}$$

την οποία γράφουμε επίσης ως

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Η (20) γράφεται και ως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{1/2} n^n e^{-n}} = \sqrt{2\pi}. \tag{21}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την (21) εξετάζουμε την ακολουθία

$$d_n := \log \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} = \log n! - \log\left(n^{n+1/2} e^{-n}\right) = \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n. \tag{22}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n - \log(n+1)! + \left(n+\frac{3}{2}\right)\log(n+1) - (n+1) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)(\log(n+1) - \log n) - 1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \frac{2n+1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - 1. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι για κάθε $x \in (-1, 1]$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

και ότι για $x \in [-1, 1)$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x4}{4} - \cdots$$

συμπεραίνουμε ότι για $|x| < 1$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{23}$$

Έστω f η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x}{\log}\frac{1+x}{1-x} - 1.$$

Λόγω της (23) ισχύει ότι για $|x| < 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \cdots. \tag{24}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$ όταν $|x| < 1$. Από την (23) βλέπουμε ότι

$$d_n - d_{n+1} = f(\frac{1}{2n+1}) \geq 0$$

και επομένως συμπεραίνουμε ότι η $\{d_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Ισχύει επίσης ότι για $|x| < 1$

$$f(x) \leq \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3} + \cdots = \frac{x^2}{3}\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right) = \frac{x^2}{3(1-x^2)}.$$

Θέτοντας $x = \frac{1}{2n+1}$ έχουμε ότι

$$d_n - d_{n+1} = f(\frac{1}{2n+1}) \leq \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$d_n - \frac{1}{12n} \leq d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\{d_n - \frac{1}{12n}\}$ είναι αύξουσα και επομένως ότι

$$d_n - \frac{1}{12n} \geq d_1 - \frac{1}{12}$$

ή

$$d_n \geq d_1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12n} \geq d_1 - \frac{1}{12} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η τελευταία αυτή σχέση μας δείχνει ότι η $\{d_n\}$ είναι κάτω φραγμένη και επομένως, αφού είναι φθίνουσα, συγκλίνει, δηλαδή, για κάποιο C

$$d_n = \log \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \to C \qquad \text{όταν } n \to \infty.$$

Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \to K \qquad \text{όταν } n \to \infty. \tag{25}$$

όπου $K = e^C$ είναι μια άγνωστη σταθερά. Μένει μόνο να υπολογίσουμε την άγνωστη σταθερά K. Αυτό θα γίνει στην επόμενη παράγραφο.

5 Το γινόμενο του Wallis

Το γινόμενο του Wallis είναι το εξής εντυπωσιακό αποτέλεσμα (όπως διατυπώθηκε από τον Wallis το 16;;).

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdots} = \frac{\pi}{2}$$

Έστω

$$I_n := \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ακολουθία $\{I_n\}$ είναι φθίνουσα αφού, για $x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$ και επομένως $(\sin x)^n \geq (\sin x)^{n+1} \geq 0$ από το οποίο βλέπουμε ότι $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx \geq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1} dx \geq 0$.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2} \tag{26}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \cos 0 - \cos \pi/2 = 1 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-1} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-1} d \cos x \\
&= \cos x \sin x|_0^{\pi/2} - (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 (\sin x)^{n-2} dx \\
&= (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx \right) = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \qquad \text{για } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Από την σχέση (28) έχουμε $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ή

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots . \tag{28}$$

Αφού η $\{I_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία έχουμε ότι

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

ή

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1. \tag{29}$$

και χρησιμοποιώντας την (28) υπό την μορφή $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$ παίρνουμε

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση και παρατηρώντας ότι $\frac{2n+1}{2n+2} \to 1$ όταν $n \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1. \tag{30}$$

Από την (28) λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (26), (27), έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\
I_4 &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} \\
I_6 &= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2} \\
&\vdots \\
I_{2n} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Παρομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{3} \\
I_5 &= \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \\
I_7 &= \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \\
&\vdots \\
I_{2n+1} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdots(2n)\cdot(2n+1))^2} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Δεδομένου ότι η τετραγωνική ρίζα είναι συνεχής συνάρτηση, από την (30) προκύπτει ότι

$$\sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}} \to 1 \qquad \text{όταν } n \to \infty. \tag{33}$$

Χρησιμοποιώντας την (31) και (32) στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$B_n := \sqrt{\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{2}{\pi}} \;=\; \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \to 1 \qquad \text{όταν } n \to \infty. \tag{34}$$

Ας θέσουμε τώρα $g(n) = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$. Από την (25) έχουμε $n!/g(n) \to K$ (και παρομοίως $(2n)!/g(2n) \to K$). Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{(g(n))^2}{g(2n)} = \frac{\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}} = 4^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}. \tag{35}$$

Ξαναγράφουμε την (34) ως

$$B_n := = \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\;\frac{4^n\left(\frac{n!}{g(n)}\right)^2}{\frac{(2n)!}{g(2n)}}\,4^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}} \;=\; \sqrt{\frac{n}{(2n+1)\pi}}\;\frac{\left(\frac{n!}{g(n)}\right)^2}{\frac{(2n)!}{g(2n)}}.$$

όπου στο δεξί μέλος της (34) χρησιμοποιήσαμε και την (35). Αν αφήσουμε τώρα το n να πάει στο άπειρο στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} B_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{(2n+1)\pi}}\,\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n!}{g(n)}\right)^2}{\frac{(2n)!}{g(2n)}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{K^2}{K} \;=\; K\sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Δεδομένου όμως ότι από την (34) $\lim_{n\to\infty} B_n = 1$, συμπεραίνουμε ότι $K = \sqrt{2\pi}$.

6 Το γενικό διωνυμικό θεώρημα

Το γενικό διωνυμικό θεώρημα γενικεύει το διωνυμικό θεώρημα του Pascal, σύμφωνα με το οποίο $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, για οποιονδήποτε εκθέτη στους πραγματικούς.

Θεώρημα 2. *Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $|x| < 1$ τότε*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \tag{36}$$

όπου ο διωνυμικός συντελεστής ορίζεται ως

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

(Όταν $n = 0$ $\binom{\alpha}{n} = 1$, που συμφωνεί με τον παραπάνω ορισμό μια και το κενό γινόμενο, δηλαδή το γινόμενο που δεν περιέχει κανένα όρο ισούται εξ ορισμού με την μονάδα.)

Παρατηρείστε ότι, αν $\alpha \in \mathbb{N}$ τότε, για $n > \alpha$ ο διωνυμικός συντελεστής μηδενίζεται αφού ο αριθμητής θα περιέχει ένα μηδενικό όρο. Συνεπώς το άπειρο άθροισμα στην (36) θα είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα και το γενικό διωνυμικό θεώρημα μας δίνει το γνωστό διωνυμικό θεώρημα του Pascal.

Αν θέσουμε $f(x) := (1+x)^\alpha$ τότε $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, και γενικά, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, αν το ανάπτυγμα Taylor συγκλίνει στην συνάρτηση, αν δηλαδή το υπόλοιπο Taylor τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$ μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$

Αυτή η τελευταία έκφραση είναι ακριβώς η (36). Αντί να αποδείξουμε ότι το υπόλοιπο Taylor τείνει στο μηδέν θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η άπειρη σειρά στην (36) συγκλίνει για κάθε $|x| < 1$. Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου εξετάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου δύο διαδοχικών όρων της σειράς (μια και οι όροι δεν είναι υποχρεωτικά θετικοί). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|} &= \frac{|\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|}{(n+1)!}\frac{n!}{|\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}n!\,\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \\
&= \frac{|\alpha-n+1|}{n+1}\,|x|.
\end{aligned}$$

Η σειρά θα συγκλίνει αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n+1|}{n+1}\,|x| = |x| < 1,$$

το οποίο αποτελεί υπόθεση του θεωρήματος.

Δεδομένου ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $|x| < 1$ όπως μόλις αποδείξαμε ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) := (1+x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$. Θα δείξουμε ότι $g(x) = 1$ για κάθε $|x| < 1$. Όπως έχουμε αναφέρει μπορούμε να παραγωγίσουμε μια δυναμοσειρά που συγκλίνει όρο προς όρο. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \;+\; (1+x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1} \\
&= \alpha(1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \;+\; (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1}\right) \\
&= \alpha(1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^n\right) \\
&= \alpha(1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^n\right) \\
&= \alpha(1+x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(-\alpha\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} + \binom{\alpha}{n}n\right)
\end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε τον όρο μέσα στην παρένθεση στο τελευταίο μέρος της παραπάνω εξίσωσης. Είναι

$$
\begin{aligned}
(n-\alpha)\binom{\alpha}{n}+(n+1)\binom{\alpha}{n+1} &= (n-\alpha)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \\
&\quad +(n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} = 0.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς $g'(x)=0$ ταυτοτικά στο διάστημα $(-1,1)$ και κατά συνέπεια $g(x)=C$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την άγνωστη σταθερά παρατηρούμε ότι $g(0)=1$ και συνεπώς $g(x)\equiv 1$. □

7 Το θεώρημα του Taylor

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, αν f είναι μια συνάρτηση συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ τότε υπάρχει $c\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(\xi)$$

για κάθε $x\in[a,b]$ όπου, φυσικά, το ξ εξαρτάται από το x και ανήκει στο $[a,x]$. Το Θεώρημα του Taylor είναι μια γενίκευση αυτής της πρότασης.

Ορισμός 1. *Έστω μια συνάρτηση f, η οποία έχει παραγώγους τάξης n στο σημείο $a\in\mathbb{R}$. Το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο σημείο a ορίζεται ως*

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n. \quad (38)$$

Παρατηρείστε ότι το $T_n(x)$ έχει τις ίδιες παραγώγους (μέχρι την τάξη n) στο a:

$$f^{(k)}(a)=T_n^{(k)}(a), \qquad k=0,1,2,\ldots,n \quad (39)$$

Το πολυώνυμο του Taylor προσεγγίζει την συνάρτηση f σε μια περιοχή του a και η προσέγγιση είναι τόσο πιο ικανοποιητική όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου και όσο πλησιέστερα είναι το x στο a. Το σφάλμα της προσέγγισης δίδεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Taylor με υπόλοιπο)**.** *Έστω f πραγματική συνάρτηση στο $[a,b]$ η οποία είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και η οποία έχει παράγωγο τάξης $n+1$ για κάθε $x\in(a,b)$. Τότε για κάθε $x\in[a,b]$*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_{n+1}(x,\xi) \quad (40)$$

όπου η συνάρτηση $R_{n+1}(x,\xi)$ ονομάζεται υπόλοιπο Lagrange και δίδεται από την σχέση

$$R_{n+1}(x,\xi) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \tag{41}$$

Το σημείο ξ στο οποίο υπολογίζεται η παράγωγος τάξης $n+1$ εξαρτάται από το x και ανήκει στο διάστημα $[a,x]$.

Απόδειξη. Έστω $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ και, για κάποιο τυχόν $x \in [a,b]$ ας ορίσουμε την ποσότητα

$$m := \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^{n+1}}. \tag{42}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a,x]$ τέτοιο ώστε

$$f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!m. \tag{43}$$

(Πράγματι, αν αντικαταστήσετε στην (42) βλέπετε ότι αυτό ισοδυναμεί με την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.) Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - m(t-a)^{n+1}, \qquad t \in [a,x].$$

Παρατηρείστε ότι $T_n^{(n+1)}(t) \equiv 0$ (αφού το T_n είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n) και επομένως

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - m(n+1)!.$$

Αν δείξουμε ότι για κάποιο $\xi \in [a,x]$ $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ τότε, αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, βλέπουμε ότι θα ισχύει η (43) και επομένως θα έχουμε αποδείξει το θεώρημα. Παραγωγίζοντας την $g(t)$ k φορές (ως προς t) έχουμε

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - T_n^{(k)}(t) - m(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)(t-a)^{n+1-k}$$

και, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την (39) έχουμε ότι

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0. \tag{44}$$

Από τον ορισμό του m ισχύει επίσης ότι $g(x) = 0$. Αφού $g(a) = g(x) = 0$, από το θεώρημα του Rolle συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [a,x]$ τέτοιο ώστε $g'(x_1) = 0$. Αφού $g'(a) = g'(x_1) = 0$ πάλι από το θεώρημα του Rolle συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_2 \in [a,x_1]$ τέτοιο ώστε $g''(x_2) = 0$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και έτσι προσδιορίζουμε αριθμούς $x \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_{n+1} \geq a$. Για τον x_k ισχύει ότι $g^{(k)} = 0$. Μας ενδιαφέρει ο τελευταίος απ΄ αυτούς, ο $x_{n+1} = \xi$, για τον οποίο ισχύει ότι $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 4. *Εναλλακτικά, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η παράγωγος τάξης $n+1$ είναι και αυτή συνεχής, το υπόλοιπο $R_{n+1}(x)$ στο θεώρημα του Taylor μπορεί να γραφεί σε ολοκληρωτικη μορφή ως*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \tag{45}$$

Απόδειξη. Παρ' ότι δεν είναι αναγκαίο για να αποδείξουμε το θεώρημα, θα κάνουμε προκειμένου να διευκολύνουμε την απόδειξη. Η επιπλέον υπόθεση δεν θα μας περιορίσει πραγματικά γιατί ικανοποιείται σε όλες τις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις που θα δούμε. Ξεκινάμε με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt. \tag{46}$$

Γράφουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος ως

$$-\int_a^x f'(t)d(x-t) = -\left. f'(t)(x-t)\right|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-a)f''(t)dt$$

όπου ολοκληρώσαμε κατά παράγοντες. Αντικαθιστώντας στην (46) παίρνουμε

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_0^x f''(t)(x-t)dt. \tag{47}$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί. Ολοκληρώνοντας πάλι κατά παράγοντες, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (47) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)d(x-t)^2 &= -\frac{1}{2}\left(f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt \right) \\
&= \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην (47) παίρνουμε

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt. \tag{48}$$

Η διαδικασία έχει γίνει πια φανερή. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι

$$\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = \frac{1}{3}f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{3}\int_a^x f^{(4)}(t)(x-t)^3 dt$$

και αντικαθιστώντας στην (48) παίρνουμε

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 = \frac{1}{3!}\int_a^x f^{(4)}(t)(x-t)^3 dt. \tag{49}$$

Επαγωγικά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

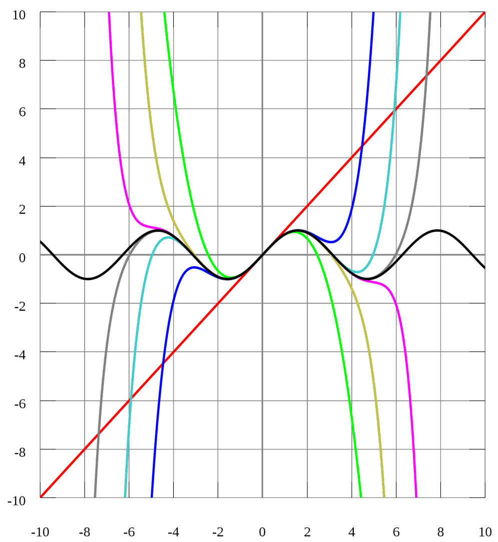
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{50}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα του Taylor με ολοκληρωτικό υπόλοιπο. □

Ορισμός 2. *Έστω μια συνάρτηση f, η οποία έχει παραγώγους όλων των ταξεων στο σημείο $a \in \mathbb{R}$. Η σειρά Taylor της f στο σημείο a ορίζεται ως*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots. \tag{51}$$

Το ανάπτυγμα Taylor για $a = 0$ συχνά ονομάζεται ανάπτυγμα Maclaurin.



Σχήμα 1: Προσέγγιση της συνάρτησης $\sin x$ με διαδοχικά πολυώνυμα Taylor. Η μαύρη καμπύλη είναι το ημίτονο. Η κόκκινη γραμμή, το πολυώνυμο Taylor πρώτου βαθμού, $T_1(x) = x$. Η πράσινη καμπύλη είναι το πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού, $T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Παρατηρείστε ότι τα διαδοχικά πολυώνυμα δίνουν πολύ καλές προσεγγίσεις κοντά στο 0, όμως όλα τείνουν στο άπειρο για μεγάλες τιμές του x ενώ η $\sin x$ παραμένει βεβαίως φραγμένη. (Εικόνα από την Wikipedia.)

8 Παραδείγματα

1. Έστω $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Τα πολυώνυμα Taylor στο 0 είναι

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= f(0) + xf'(0) = 1 + 3x, \\
T_2(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) = 1 + 3x + 2x^2, \\
T_3(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{3!}x^3 f'''(0) = 1 + 3x + 2x^2 + x^3 = f(x) \\
T_n(x) &= f(x) \qquad \text{για κάθε } n \geq 4.
\end{aligned}$$

2. Έστω $f(x) = e^x$. Ισχύει ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το πολυώνυμο Taylor στο 0 είναι το

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Το υπόλοιπο δίδεται από την

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi \in [0, x].$$

3. Έστω $f(x) = \sin x$. Έχουμε $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, κ.ο.κ. Συνεπώς

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

και

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \qquad \xi \in [0, x].$$

4. Έστω $f(x) = \cos x$. Έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$, κ.ο.κ. Συνεπώς

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

και

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \xi \in [0, x].$$

5. Έστω $f(x) = \log(1+x)$. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ και γενικά $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Συνεπώς

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

και

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^n} x^{n+1}, \qquad \xi \in [0, x].$$

6. Έστω $f(x) = (1+x)^\alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Παρατηρείστε ότι αν $\alpha \in \mathbb{N}$ για $n = \alpha+1$ η παράγωγος μηδενίζεται. Συνεπώς

$$T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Το υπόλοιπο είναι

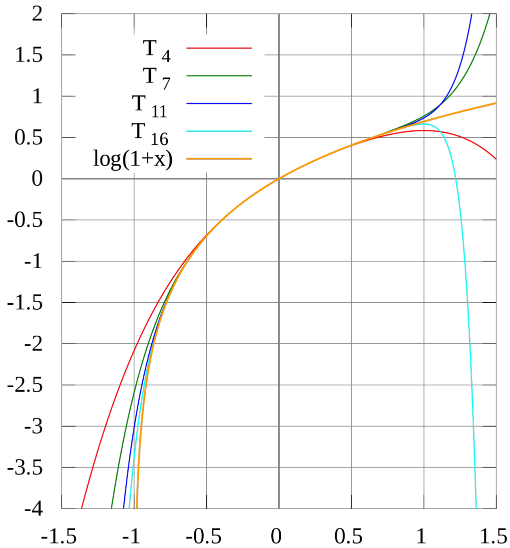
$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}, \qquad \xi \in [0, x].$$

9 Αναπτύγματα Taylor μερικών γνωστών συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο δίδονται από τις σχέσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (52)$$

$$\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \qquad (53)$$



Σχήμα 2: Προσέγγιση της συνάρτησης $\log(1+x)$ με διαδοχικά πολυώνυμα Taylor.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\begin{aligned} e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cdots, \\ e^{-x} &= 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}\cdots, \end{aligned}$$

αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε κατά μέλη παίρνουμε

$$\sinh x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\cdots \tag{54}$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\cdots \tag{55}$$

Προκειμένου να βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\arcsin x$ παρατηρούμε ότι

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}, \tag{56}$$

όπου, το ανάπτυγμα σε σειρά προκύπτει από το διωνυμικό θεώρημα. Για τυχόν $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{57}$$

Αν $g(x) := (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{((2n)!)^2}{4^n(n!)^2}\right)x^{2n}$. Αυτό σημαίνει, δεδομένου του αναπτύγματος Taylor $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)$. Συνεπώς, λόγω της (56),

$$\arcsin^{(2n)}(0) = 0, \qquad \arcsin^{(2n+1)}(0) = g^{(2n)}(0) = \frac{((2n)!)^2}{4^n(n!)^2}, \qquad , n=0,1,2,\ldots.$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{((2n)!)^2}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} \binom{2n}{n} x^{2n+1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, δεδομένου ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$