Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 12-12-11
Μ. Ζαζάνης

1 Άπειρες σειρές με Θετικούς Όρους: Κριτήρια σύγκλισης

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε αρχικά σειρές με θετικούς όρους. Τα αποτελέσματα θα επεκταθούν αργότερα στην περίπτωση σειρών των οποίων οι όροι δεν είναι υποχρεωτικά θετικοί. Το βασικότερο κριτήριο σύγκλισης, στο οποίο στηρίζονται όλα τα επόμενα είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 1. *Έστω ακολουθίες, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ με μη αρνητικούς όρους. Αν υπάρχει $c > 0$ και $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $a_n \leq cb_n$ για κάθε $n \geq N$, τότε η σύγκλιση της $\sum b_n$ συνεπάγεται την σύγκλιση της $\sum a_n$.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Αν $B = \sum_{k=1}^{N} a_k$ τότε $s_n \leq B + ct_n$ για κάθε n. Αν η ακολουθία t_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $t_n \leq M$ για κάθε n. Συνεπώς $s_n \leq B + cM$ για κάθε n, πράγμα που σημαίνει ότι η αύξουσα ακολουθία s_n είναι και φραγμένη και επομένως συγκλίνει. □

Βασική Παρατήρηση: Η σύγκλιση ή μη μιας σειράς δεν εξαρτάται από την τιμή συγκεκριμένων όρων της ακολουθίας a_n. Εξαρτάται μόνο από την *οριακή συμπεριφορά* της a_n.

Θεώρημα 2 (Σύγκριση ορίων)**.** *Αν $a_n > 0$, $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αφού $a_n/b_n \to 1$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $n \geq N$ συνεπάγεται ότι $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$. Άρα $b_n < 2a_n$ και $a_n < \frac{3}{2}b_n$ όταν $n \geq N$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα. □

Παράδειγμα 1. Συγκρίνοντας με τη σειρά $\sum \frac{1}{n}$ η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει συμπεραίνουμε ότι οι ακόλουθες τρεις σειρές επίσης αποκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}).$$

Πράγματι, ισχύουν τα όρια

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = n\log(1+\frac{1}{n}) = \log(1+\frac{1}{n})^n \to \log e = 1.$$

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha}$ συγκλίνει για $\alpha > 2$ και αποκλίνει για $0 < \alpha \leq 2$.

2 Το κριτήριο της ρίζας για μη αρνητικές σειρές

Αν $\sum a_n$ είναι μια σειρά της οποίας οι όροι ικανοποιούν $\forall n \geq N$ την ανισότητα

$$0 \leq a_n \leq x^n \tag{1}$$

όπου $0 < x < 1$ τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει με βάσει το Θεώρημα 1. Η ανισότητα (1) είναι ισοδύναμη με την $0 \leq a_n^{1/n} \leq x$. Αν η ακολουθία $\{a_n^{1/n}\}$ συγκλίνει έχουμε επομένως το ακόλουθο κριτήριο.

Θεώρημα 3 (Κριτήριο της ρίζας)**.** *Έστω $\sum a_n$ μια σειρά με μη αρνητικούς όρους, τέτοια ώστε $a_n^{1/n} \to R$ όταν $n \to \infty$.*

1. *Αν $R < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει.*
2. *Αν $R > 1$ τότε η σειρά αποκλίνει.*
3. *Αν $R = 1$ το κριτήριο δεν αποφαίνεται για την σύγκλιση της σειράς.*

Απόδειξη. Έστω $R < 1$ και $R < x < 1$. Τότε $a_n < x$ για κάθε $n \geq N$. Συνεπώς η $\sum a_n$ συγκλίνει με βάση το Θεώρημα 1. Αν τώρα $R > 1$ τότε $a_n > 1$ για κάθε $n \geq N_1$ και συνεπώς δεν είναι δυνατόν η a_n να συγκλίνει στο μηδέν. Επομένως η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει. Για την τρίτη περίπτωση που $R = 1$ εξετάζουμε απλώς τις $a_n = 1/n$ και $a_n = 1/n^2$. Έχουμε και στις δύο περιπτώσεις $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$ αλλά η $\sum 1/n$ αποκλίνει ενώ η $\sum 1/n^2$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 4 (Κριτήριο του λόγου)**.** *Έστω $\sum a_n$ μια σειρά με θετικούς όρους, τέτοια ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ όταν $n \to \infty$.*

1. *Αν $L < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει.*
2. *Αν $L > 1$ τότε η σειρά αποκλίνει.*
3. *Αν $L = 1$ το κριτήριο δεν αποφαίνεται για την σύγκλιση της σειράς.*

Απόδειξη. Έστω $L < 1$ και $L < x < 1$. Τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε $a_{n+1}/a_n < x$ για κάθε $n \geq N$. Συνεπώς

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n} \qquad \text{για κάθε } n \geq N.$$

και επομένως η $\{a_n x^{-n}\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Συνεπώς $a_n x^{-n} \leq a_N x^{-N}$ για κάθε $n \geq N$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $a_n \leq Cx^n$ με $C = a_N x^N$ για κάθε $n \geq N$. Επομένως η $\sum a_n$ συγκλίνει με βάση το Θεώρημα 1.

Στην περίπτωση που $L > 1$ ισχύει βεβαίως ότι $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \geq N$. Συνεπώς η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα από κάποια τιμή του n και πέρα και έχει θετικούς όρους και επομένως δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν. Άρα η $\sum a_n$ δεν συγκλίνει.

Τέλος, για την περίπτωση $L = 1$ παρατηρούμε ότι σ' αυτήν υπάγονται τόσο η $a_n = 1/n$ όσο και η $a_n = 1/n^2$. Για την πρώτη η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει ενώ για την δεύτερη συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$