Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 28-11-11
Μ. Ζαζάνης

1 Άπειρες Σειρές: Πρώτες έννοιες

Ορισμός 1. *Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία $\{s_n\}$ που ορίζεται ως $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$ και γενικά $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ονομάζεται άπειρη σειρά και συμβολίζεται ως*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός s τέτοιος ώστε $s_n \to s$ θα λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στον s ή ότι το άθροισμα της σειράς είναι s και θα γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Αν η $\{s_n\}$ αποκλίνει θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1. Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ συγκλίνει διότι $s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$ και επομένως $s_n \to s := \frac{1}{1-a}$ όταν $n \to \infty$.

Παράδειγμα 2. Η *αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$. Πράγματι, είναι σαφές ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ είναι αύξουσα και, όπως θα δούμε, τείνει στο άπειρο. Θεωρώ την s_{2^n} για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\times\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\times\frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}} \\
&\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ όροι}} = 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $s_{2^n} \to \infty$ όταν $n \to \infty$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτό συνεπάγεται $s_n \to \infty$ όταν $n \to \infty$.

Παράδειγμα 3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ συγκλίνει για κάθε $\alpha > 1$. Πράγματι, δεδομένου ότι όλοι οι όροι που αθροίζουμε είναι θετικοί, και επειδή $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
s_n \leq s_{2^n-1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}}_{\leq 2\times\frac{1}{2^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}}_{\leq 4\times\frac{1}{4^\alpha}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}}_{\leq 2^{n-1}\times\frac{1}{(2^\alpha)^{n-1}}} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι, αφού $\alpha - 1 > 0$, $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Επομένως, έχουμε δείξει ότι η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη, και αφού ασφαλώς είναι και αύξουσα, συγκλίνει.

Θεώρημα 1. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνουσες άπειρες σειρές και* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Τότε οι σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ *επίσης συγκλίνει και*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Απόδειξη. Αν $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $t_n = b_1 + \cdots + b_n$ τότε η $r_n := \alpha s_n + \beta t_n$ είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$. Ισχύει βεβαίως ότι $\lim_n r_n = \alpha \lim_n s_n + \beta \lim_n t_n$ λόγω του αντιστοίχου θεωρήματος για τις ακολουθίες και αυτό αποδεικνύει την πρόταση. □

Πόρισμα 1. *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και η* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *αποκλίνει.*

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το άθροισμά τους. Για παράδειγμα εξετάστε την περίπτωση $a_n = \frac{1}{2^n} + 1$ και $b_n = -1$.

Θεώρημα 2. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει τότε* $a_n \to 0$.

Απόδειξη. Αν η σειρά συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} s_n = s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Συνεπώς έχουμε $0 = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

2 Τηλεσκοπικές Σειρές

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$ ονομάζεται *τηλεσκοπικό*.

Θεώρημα 3. *Αν* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία* $\{b_n\}$ *συγκλίνει. Τότε έχουμε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$ *όπου* $L = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Απόδειξη. Έχουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Το συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει αν αφήσουμε $n \to \infty$. □

Παράδειγμα 4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ είναι τηλεσκοπική και έχει άθροισμα 1. Πράγματι, είναι $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Επομένως έχουμε $b_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_1 = 1$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = 1.$$

Παράδειγμα 5. Έστω x πραγματικός αριθμός που δεν ανήκει στο σύνολο των αρνητικών ακεραίων $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$ είναι τηλεσκοπική και συγκλίνει. Πράγματι, $a_n = \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}\right)$. Επομένως έχουμε $b_n = \frac{1}{2(n+x)(n+x+1)} \to 0$, $b_1 = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}.$$

Παράδειγμα 6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$ είναι τηλεσκοπική με $b_n = \log n$. Η σειρά αυτή δεν συγκλίνει αφού $b_n \to \infty$.

3 Εναλλάσσουσες σειρές

Ορισμός 2. *Αν η ακολουθία a_n έχει θετικούς όρους, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ονομάζεται εναλλάσσουσα.*

Θεώρημα 4 (Κριτήριο του Leibniz). *Αν η $\{a_n\}$ είναι θετική, φθίνουσα και συγκλίνει στο μηδέν, τότε η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει. Αν S συμβολίζει το άθροισμά της τότε*

$$0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1} \qquad \forall n. \tag{1}$$

Απόδειξη. Η υπακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα αφού $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Παρομοίως, η $\{s_{2n+1}\}$ είναι φθίνουσα επειδή $s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0$. Ισχύει όμως ότι

$$s_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) + \cdots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1 = s_1$$

και

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} > a_1 - a_2 = s_2.$$

Άρα η s_{2n+1} είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και επομένως συγκλίνει: $s_{2n+1} \to S'$. Παρομοίως, η s_{2n} είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και επίσης συγκλίνει: $s_{2n} \to S''$. Ισχύει επίσης ότι

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Έχουμε συνεπώς δείξει ότι η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό S που ισούται με το κοινό όριο των δύο υπακολουθιών.

Για να δείξουμε τώρα την ανισότητα (1) παρατηρούμε ότι

$$s_{2n} < s_{2n+2} < S < s_{2n+1} < s_{2n-1}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 &< S - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \\ 0 &< s_{2n-1} - S < s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}. \end{aligned}$$

□