Μαθηματικός Λογισμός I **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 31-10-11
Μ. Ζαζάνης

1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Θα ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών οποιαδήποτε μονοσήμαντη απεικόνιση από τους φυσικούς στους πραγματικούς αριθμούς, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Συνήθως συμβολίζουμε τους όρους μιας ακολουθίας ως a_1, a_2, a_3, $\ldots$, τον γενικό όρο ως a_n, και την ίδια την ακολουθία ως $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ή απλά $\{a_n\}$. Παραδείγματα ακολουθιών είναι οι

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = (-1)^n, \qquad a_n = \frac{1}{n^k} \text{ όπου } k \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+2n+5}.$$

Σ' αυτά τα παραδείγματα ο γενικός όρος της ακολουθίας προσδιορίζεται από μια αλγεβρική έκφραση του φυσικού n. Σε πολλές περιπτώσεις όμως οι όροι της ακολουθίας μπορούν να προσδιοριστούν με διαφορετικό τρόπο.

Για παράδειγμα, συχνά προσδιορίζουμε τους όρους της ακολουθίας βάσει ενός *αναδρομικού ορισμού:* Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση και $r \in \mathbb{R}$. Τότε η *αναδρομική σχέση*

$$\begin{aligned} a_1 &= r \\ a_{n+1} &= f(a_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

προδιορίζει μια πραγματική ακολουθία. Έτσι, αν $r = 1$ και $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, η η αναδρομική σχέση που προσδιορίζει την ακολουθία είναι η

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Οι 5 πρώτοι όροι της ακολουθίας αυτής παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα (σε δεκαδική μορφή με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων)

a_1	1
a_2	1.5
a_3	1.41666667
a_4	1.41421569
a_5	1.41421356

Πολλά πρακτικά προβλήματα καταλήγουν σε αναδρομικούς ορισμούς και δεν υπάρχει λόγος να περιοριστούμε στην περίπτωση που κάθε όρος της ακολουθίας προσδιορίζεται σαν συνάρτηση μόνο του προηγουμένου όρου. Θα μπορούσε κάλλιστα να προσδιορίζεται σαν συνάρτηση των δύο προηγουμένων όρων, των τριών, ή και όλων των προηγουμένων όρων. Επίσης συχνά επιλέγουμε η αρίθμηση των όρων της ακολουθίας να ξεκινά από το 0 και όχι από το 1, οι όροι της ακολουθίας δηλαδή να είναι οι a_0, a_1, a_2, κλπ.

Ακολουθία Fibonacci. Εστω $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, και

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots . \tag{1}$$

Είναι προφανές από τον ανωτέρω ορισμό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι φυσικοί. Οι πρώτοι 36 όροι δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	f_{27}
2,584	4,181	6,765	10,946	17,711	28,657	46,368	75,025	121,393	196,418	317,811

f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}
514,229	832,040	1,346,269	2,178,309	3,524,578	5,702,887	9,227,465	14,930,352	24,157,817

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται αριθμοί του Fibonacci και, όπως παρατηρούμε αυξάνονται με μεγάλη ταχύτητα.

Ορισμός 1. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ θα ονομάζεται* αύξουσα *αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_{n+1} > a_n$ τότε θα ονομάζεται* γνησίως αύξουσα. *Στην περίπτωση που $a_{n+1} \leq a_n$ ή $a_{n+1} < a_n$ οι αντίστοιχοι όροι για τις ακολουθίες είναι* 'φθίνουσα' *και* 'γνησίως φθίνουσα'.

Ορισμός 2. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ θα ονομάζεται* άνω φραγμένη *αν υπάρχει $B > 0$ τέτοιος ώστε $a_n \leq B$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμοια θα ονομάζεται* κάτω φραγμένη *άν υπάρχει $B > 0$ τέτοιος ώστε $a_n \geq -B$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια ακολουθία που είναι άνω και κάτω φραγμένη θα ονομάζεται* φραγμένη.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $\{\frac{n}{n+1}\}$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $\{n^2 + 2\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Η ακολουθία $\{(-1)^n n\}$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.

2 Όριο ακολουθίας

Ορισμός 3. *Ο πραγματικός αριθμός L θα ονομάζεται* όριο της ακολουθίας $\{a_n\}$ *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε*

$$|a_n - L| \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Ισοδύναμα, λέμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L και γράφουμε συμβολικά $a_n \to L$.

Παράδειγμα 1. Η ακολουθία $\{1/n\}$ έχει όριο το μηδέν. Για να το διαπιστώσουμε αρκεί να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε ϵ μπορούμε να βρούμε n_0 έτσι ώστε $|1/n| < \epsilon$ για όλους τους $n \geq n_0$. Ας διαλέξουμε $n_0 > 1/\epsilon$. Συνεπώς έχουμε $n \geq n_0 > 1/\epsilon$ και επομένως $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.

Παράδειγμα 2. Η ακολουθία $\{\frac{2n^2+1}{n^2+n}\}$ συγκλίνει στο 2. Πράγματι, $\left|\frac{2n^2+1}{n^2+n} - 2\right| = \left|\frac{-2n+1}{n^2+n}\right| < \frac{2}{n}$. Δεδομένου οποιουδήποτε αριθμού $\epsilon > 0$, διαλέγουμε $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Όταν $n \geq n_0$, $\left|\frac{2n^2+1}{n^2+n} - 2\right| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \epsilon$.

Ορισμός 4. *Η ακολουθία $\{a_n\}$ τίνει στο $+\infty$ (συχνά χρησιμοποιείται και ο όρος 'αποκλίνει στο $+\infty$' ή και απλώς αποκλίνει) αν για κάθε $B > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $a_n > B$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Όμοια, η ακολουθία $\{a_n\}$ τίνει στο $-\infty$ αν για κάθε $B > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $a_n < -B$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $\{\frac{n^2}{n+5}\}$ τίνει στο $+\infty$ ενώ η $\{\frac{-n^2+100n+221}{n+1}\}$ τίνει στο $-\infty$.

Θεώρημα 1. *Αν μία ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο όριο, τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρχουν δύο διαφορετικοί αριθμοί, L και L' τέτοιοι ώστε $a_n \to L$ και $a_n \to L'$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά όρια και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας θεωρήσουμε ότι $L < L'$ και ας θέσουμε $\delta = L' - L > 0$. Έχουμε

$$|L' - L| \;=\; |L' - a_n - (L - a_n)| \;\leq\; |a_n - L'| \;+\; |a_n - L| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

από την τριγωνική ανισότητα. Έστω $0 < \epsilon < \delta/4$. Από τον ορισμό της σύγκλισης για αρκετά μεγάλα n θα ισχύουν οι ανισότητες $|a_n - L'| < \delta/4$ και $|a_n - L| < \delta/4$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$$\delta = |L' - L| < \delta/4 + \delta/4 = \delta/2,$$

όπερ άτοπον. ∎

Θεώρημα 2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Εστω ότι η $a_n \to L$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $B > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq B$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την σύγκλιση της ακολουθίας συνάγουμε ότι υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - L| < 1$ το οποίο συνεπάγεται $|a_n| < |L| + 1$. Συνεπώς

$$|a_n| \;\leq\; B := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |L| + 1\}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

∎

Θεώρημα 3. *Εστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_n \to L_1$, $b_n \to L_2$. Τότε ισχύει ότι*

1. *Η ακολουθία $\{a_n + b_n\}$ συγκλίνει στο $L_1 + L_2$.*
2. *Η ακολουθία $\{ra_n\}$, όπου $r \in \mathbb{R}$, συγκλίνει στο rL_1.*
3. *Η ακολουθία $\{a_n b_n\}$ συγκλίνει στο $L_1 L_2$.*
4. *Η ακολουθία $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ συγκλίνει στο $\frac{L_1}{L_2}$ υπό την προϋπόθεση ότι $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $L_2 \neq 0$.*

Απόδειξη. 1. Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|a_n + b_n - L_1 + L_2| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω ϵ δεδομένο. Από την σύγκλιση $a_n \to L$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|a_n - L_1| < \epsilon/2$ όταν $n \geq n_1$. Παρομοίως, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|b_n - L_2| < \epsilon/2$ όταν $n \geq n_2$. Ας διαλέξουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$, δηλαδή το μεγαλύτερο μεταξύ των n_1 και n_2. Από την τριγωνική ιδιότητα ισχύει όμως ότι

$$|a_n + b_n - L_1 + L_2| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2|$$

και για $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - L_1| < \epsilon/2 \qquad \text{και} \qquad |b_n - L_2| < \epsilon/2.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο αυτές ανισότητες στην προηγούμενη έχουμε ότι

$$|a_n + b_n - L_1 + L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \qquad \text{όταν } n \geq n_0$$

και η **1** έχει αποδειχθεί.

2. Μας δίδεται $\epsilon > 0$. Εφ'οσον $a_n \to L_1$, μπορούμε να διαλέξουμε n_0 τέτοιο ώστε $|a_n - L_1| < \frac{\epsilon}{|r|}$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά

$$|a_n - L_1| < \frac{\epsilon}{|r|} \quad \Longleftrightarrow \quad |r||a_n - L_1| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |ra_n - rL_1| < \epsilon.$$

3. Εφ' όσον η $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα, βάσει του προηγουμένου θεωρήματος υπάρχει θετικός A τέτοιος ώστε $|a_n| \leq A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εχουμε συνεπώς

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &= |a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \leq |a_n b_n - a_n L_2| + |a_n L_2 - L_1 L_2| \\ &= |a_n||b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leq A|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1|. \end{aligned} \tag{3}$$

Αν διαλέξουμε n_1 και n_2 έτσι ώστε $|a_n - L_1| < \epsilon/(2L_2)$ $\forall\ n \geq n_1$ και $|b_n - L_2| < \epsilon/(2A)$ $\forall\ n \geq n_2$, τότε, για κάθε $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$|a_n b_n - L_1 L_2| \ < \ A\frac{\epsilon}{2A} + L_2\frac{\epsilon}{2L_2} = \epsilon.$$

4. Πρώτα θα δείξουμε ότι, αφού $b_n \to L_2 \neq 0$, υπάρχει n_3 τέτοιο ώστε $n \geq n_3$ συνεπάγεται ότι $|b_n| > |L_2|/2$. Αυτό αληθεύει επειδή υπάρχει n_3 τέτοιο ώστε $|b_n - L_2| < |L_2|/2$. Αν μας δοθεί $\epsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε n_1 και n_2 έτσι ώστε, $\forall\ n \geq n_1$, $|a_n - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}$ και $\forall\ n \geq n_2$, $|b_n - L_2| < \frac{\epsilon|L_2|^2}{4|L_1|}$. Διαλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ εξασφαλίζουμε ότι και οι τρεις προαναφερθείσες συνθήκες ισχύουν όταν $n \geq n_0$.

Προσφαφαιρώντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{b_n} + \frac{L_1}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{b_n}\right| + \left|\frac{L_1}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}|a_n - L_1| + \frac{|L_1|}{|b_n||L_2|}|b_n - L_2|. \qquad (4)\end{aligned}$$

Όταν $n \geq n_0$, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες για το $|b_n|$, και τα $|a_n - L_1|$ και $|b_n - L_2|$ έχουμε

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| < \frac{2}{|L_2|}\frac{\epsilon|L_2|}{4} + \frac{2|L_1|}{|L_2|^2}\frac{\epsilon|L_2|^2}{4|L_1|} = \epsilon.$$

∎

3 Υπακολουθίες

Εστω $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μία αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση από τους φυσικούς στους φυσικούς, δηλαδή τέτοια ώστε $m < n \Rightarrow g(m) < g(n)$, $\forall m, n\ \in \mathbb{N}$. (Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $g(n) = n^3$ και $g(n) = 2n - 1$ ικανοποιούν τις παραπάνω προϋποθέσεις μια και είναι αυστηρώς αύξουσες με πεδίο τιμών τους φυσικούς ενώ η $g(n) = \frac{n}{n+1}$ δεν τις ικανοποιεί διότι είναι μεν αύξουσα αλλά δεν έχει ως πεδίο τιμών τους φυσικούς.) Εστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία ρητών αριθμών. Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f(n) = a_{g(n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ονομάζεται *υπακολουθία* της $\{a_n\}$.

Παράδειγμα 1. Αν η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι η $\{\frac{1}{n}\}$ και $g(n) = n^2$ τότε η υπακολουθία που προκύπτει είναι η $\{\frac{1}{n^2}\}$.

Ενας ισοδύναμος τρόπος ορισμού της έννοιας της υπακολουθίας είναι να θεωρήσουμε μία αυστηρώς αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έστω $\{n_k ; k = 1, 2, 3, \ldots\}$, και την καινούργια ακολουθία που προκύπτει από την $\{a_n\}$ αν θεωρήσουμε μόνον τους όρους $\{a_{n_k}\}$. Για παράδειγμα εστω $n_k = f_k$, $k = 1, 2, \ldots$, όπου f_k ο k-οστός αριθμός του Fibonacci (εξαιρουμένου του f_0). Αν $a_n = \frac{1}{n}$ τότε η υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ είναι η $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{21} \ldots\right\}$.

Παράδειγμα 2. Εστω η ακολουθία

$$\{a_n\} = \left\{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right\} = \{-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2^2},\ -\tfrac{1}{2^3},\ \tfrac{1}{2^4},\ -\tfrac{1}{2^5},\ \ldots\}.$$

Οι ακολουθίες $\{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2^3},\ -\frac{1}{2^5},\ \ldots\}$ και $\{\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^6},\ \ldots\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$.