Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 17-10-11
Μ. Ζαζάνης

1 Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\{1, 2, 3, \ldots\}$ με το σύμβολο $\mathbb{N}$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών, συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός, συμβολίζεται με $\mathbb{N}_0$.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. *Εστω $P(n)$ πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $P(1)$ είναι αληθής και αν $P(n)$ αληθής συνεπάγεται ότι $P(n+1)$ αληθής, τότε η $P(n)$ είναι αληθής $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Παράδειγμα 1: Εστω $P(n)$ η πρόταση $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Η $P(1)$ είναι αληθής διότι $1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$. (Επαληθεύουμε την *βάση της επαγωγής*)

Εστω $P(n)$ αληθής. Τότε $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ και προσθέτοντας και στα δύο μέλη της εξίσωσης την ποσότητα $n + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν δεχθούμε ότι ισχύει η $P(n)$ τότε θα πρέπει να αληθεύει και η $P(n+1)$. (Επαλήθευση του *επαγωγικού βήματος*).

Άρα η $P(n)$ ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2: Εστω $P(n)$ η πρόταση $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Βάση της επαγωγής: $1^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 = 1$, συνεπώς η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό Βήμα: Εστω $P(n)$ αληθής. Ας προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης $P(n)$ τον όρο $(n+1)^2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1). \end{aligned}$$

(Η τελευταία ισότητα μπορεί να ελεγχεί εύκολα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(n-1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$ και $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.) Επομένως το επαγωγικό βήμα επαληθεύθηκε και η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό.

Πριν προχωρήσουμε αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μαθηματική επαγωγή είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη προτάσεων που σχετίζονται με τους φυσικούς αριθμούς, δεν είναι όμως εργαλείο ανακάλυψης τέτοιων προτάσεων. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ξεκινήσαμε με μια εικασία για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών, ή για το άθροισμα των τετραγώνων τους, την οποία στη συνέχεια αποδείξαμε με την βοήθεια της επαγωγής. Πώς όμως προκύπτουν τέτοιες εικασίες· Για ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων υπάρχουν γενικές μέθοδοι ενώ για άλλες χρειάζεται σκέψη, διαίσθηση και πειραματισμός με ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα την απάντηση στο πρώτο πρόβλημα, το άθροισμα των n πρώτων φυσικών, μπορούμε να την βρούμε ως εξής: Εστω $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Τότε

$$2S_n = \begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ & & & & + & & & & \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array} = n(n+1)$$

από όπου αμέσως προκύπτει ότι $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι πιο δύσκολο αλλά, βασιζόμενοι στο πρώτο θα μπορούσαμε να υποθέσουμε (χωρίς να είμαστε βέβαιοι για την ορθότητα της υπόθεσης) ότι υπάρχουν αριθμοί A, B, C, D. τέτοιοι ώστε

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = An^3 + Bn^2 + Cn \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Θέτωντας $n = 1, 2, 3$ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + C \\ 5 &= 8A + 4B + 2C \\ 14 &= 27A + 9B + 3C \end{aligned}$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν οι τιμές $A = 1/3$, $B = 1/2$, $C = 1/6$. Έχοντας μαντέψει την πιθανή λύση μπορούμε τώρα να δοκιμάσουμε να αποδείξουμε ότι είναι σωστή επαγωγικά.

Παράδειγμα 3: [**Ανισότητα του Bernoulli**] Εστω $a > -1$ πραγματικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \tag{1}$$

Εχουμε πάλι μια πρόταση για κάθε φυσικό n, η οποία προφανώς ισχύει για $n = 1$. (Πράγματι όταν $n = 1$ η πρόταση γίνεται $1 + a \geq 1 + a$.) Συνεπώς η βάση της επαγωγής έχει επαληθευθεί. Εστω ότι η πρόταση ισχύει για n. Αφού εξ υποθέσεως $a > -1$, έχουμε $1+a > 0$ και συνεπώς αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με $(1 + a)$ η φορά της δέν αλλάζει. Συνεπώς έχουμε

$$(1 + a)^{(n+1)} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

(Η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $a^2 \geq 0$). Επομένως δείξαμε ότι, αν η ανισότητα ισχύει για n θα πρέπει να ισχύει και για $n + 1$, δηλαδή επαληθεύσαμε το επαγωγικό βήμα. Συνεπώς η ανισότητα ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\frac{1}{1 + a} \geq 1 - a \tag{2}$$

υπό την προϋπόθεση πάντα ότι $a > -1$. Πράγματι η ανισότητα (2) είναι ισοδύναμη με την $1 \geq (1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$ που είναι αληθής.

2 Το Διωνυμικό Θεώρημα

2.1 Διωνυμικοί συντελεστές και το τρίγωνο του Pascal

Οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται ως

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Όταν $k > n$ τότε $\binom{n}{k} = 0$ ενώ $\binom{n}{0} = 1$ (επειδή $0! = 1$). Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{4}$$

Πράγματι, το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\,\frac{n}{k(n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

και η τελευταία σχέση ισούται με το αριστερό μέλος της (4).

Λογω της (4) οι διωνυμικοί συντελεστές μπορούν να υπολογισθούν από το τρίγωνο του Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&& \\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&& \\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&& \\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&& \\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1& \\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}$$

2.2 Το διωνυμικό θεώρημα

Θεώρημα 1. *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{5}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ η (5) γίνεται

$$a + b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = 1 \cdot b + 1 \cdot a$$

και συνεπώς η βάση της επαγωγής ισχύει. Έστω τώρα ότι η (5) ισχύει για μια συγκεκριμένη τιμή n. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Έχουμε

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}. \quad (6)$$

Το πρώτο από τα δύο τελευταία αθροίσματα γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k}.$$

Συνεπώς το άθροισμα στο τελευταίο σκέλος της (6) γράφεται ως ενώ το δεύτερο

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} &= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$\square$

3 Υπολογισμός Εμβαδού Παραβολικού Χωρίου

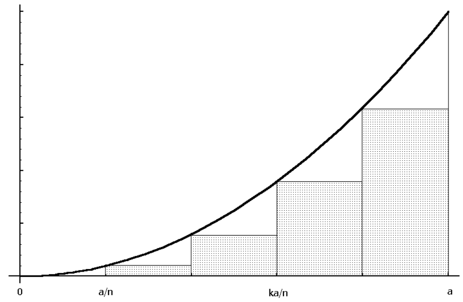
Εστω η παραβολή που ορίζεται από την συνάρτηση $f : x \to x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$. Προκειμένου να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα, της ευθείας $x = a$, και του γραφήματος της συνάρτησης f, διαμερίζουμε τον οριζόντιο άξονα σε n ίσα τμήματα μεγέθους a/n. Υπολογίζοντας το εμβαδόν των n ορθογωνίων λωρίδων όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου που μας ενδιαφέρει.

Αν συμβολίσουμε με A το πραγματικό εμβαδόν του παραβολικού χωρίου, με L_n το εμβαδόν που προκύπτει από την προσέγγιση του σχήματος 1 και με U_n εκείνο που προκύπτει από την προσέγγιση του σχήματος 2 έχουμε

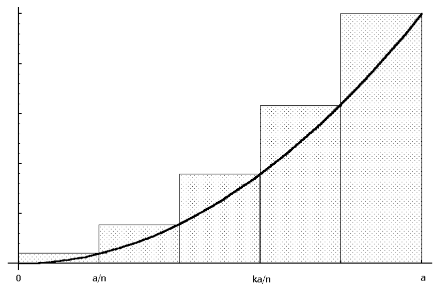
$$L_n < A < U_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

είναι δε

$$L_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a}{n}\left(\frac{ak}{n}\right)^2 = a^3\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$



Σχήμα 1: Κάτω φράγμα για το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου



Σχήμα 2: Ανω φράγμα για το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου

και
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ak}{n}\right)^2 = a^3 \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$
Με βάση το παράδειγμα 2 έχουμε $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ και συνεπώς
$$U_n = \frac{a^3}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \tag{7}$$
Παρομοίως, $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Εχουμε λοιπόν ότι, για κάθε φυσικό n, το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου πρέπει να ικανοποιεί την διπλή ανισότητα
$$\frac{a^3}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) < A < \frac{a^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$
ή, ισοδύναμα,
$$\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{a^3}A - 1 < -\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}. \tag{8}$$
Όμως, ο μοναδικός αριθμός που μπορεί να ικανοποιεί και τις δύο παραπάνω ανισότητες *για κάθε τιμή του n, οσοδήποτε μεγάλη, είναι το μηδέν, και συνεπώς* $\frac{3}{a^3}A - 1 = 0$ *ή*
$$A = \frac{a^3}{3}. \tag{9}$$

Αριθμητικός και Γεωμετρικός Μέσος

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμητικός και γεωμετρικός μέσος των ορίζεται ως

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{10}$$

Θα αποδείξουμε την εξής πρόταση: $A_n \geq G_n$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη: Έστω $\mathscr{P}(n)$ η πρόταση $\{\ A_n \geq G_n$ *για κάθε* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *με* $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n\ \}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει η πρόταση για $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, δηλαδή για τις δυνάμεις του 2.

Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει με τετριμμένο τρόπο αφού $A_1 = \frac{x_1}{1} = (x_1)^1 = G_n$.

Για $n = 2$ ισχύει διότι $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2$ και συνεπώς

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \forall x_1, x_2 > 0. \tag{11}$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\mathscr{P}(2^n) \Rightarrow \mathscr{P}(2^{n+1})$ (δηλαδή ότι αν ισχύει η $\mathscr{P}(2^n)$ τότε ισχύει και η $\mathscr{P}(2^{n+1})$). Ας θέσουμε $m = 2^n$ οπότε $2m = 2^{n+1}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(x_1 \cdots x_m \cdot x_{m+1} \cdots x_{2m})^{1/2m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{2m} \tag{12}$$

ξεκινώντας από την υπόθεση ότι

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m} \tag{13}$$

$$(x_{m+1} \cdots x_{2m})^{1/m} \leq \frac{x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{m} \tag{14}$$

(αφού υποθέτουμε ότι ισχύει η $\mathscr{P}(m)$). Το αριστερό μέλος της (12) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
(x_1 \cdots x_m \cdot x_{m+1} \cdots x_{2m})^{1/2m} &= \Big((x_1 \cdots x_m)^{1/m} \cdot (x_{m+1} \cdots x_{2m})^{1/m}\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{(x_1 \cdots x_m)^{1/m} + (x_{m+1} \cdots x_{2m})^{1/m}}{2} \\
&\leq \frac{\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{m}}{2} \\
&= \frac{x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{2m},
\end{aligned}$$

όπου, για την πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (11), και για την δεύτερη τις (13) και (14). Επομένως αποδείξαμε την (12) και έτσι, βάσει της αρχής της επαγωγής, ξέρουμε ότι ισχύει η $\mathscr{P}(2^n)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η $\mathscr{P}(n)$ ισχύει *για όλους τους φυσικούς, και όχι μόνο γι΄ αυτούς που είναι δύναμη του 2* θα δείξουμε στη συνέχεια ότι αν ισχύει η $\mathscr{P}(n)$ για κάποιο n, τότε ισχύει και η $\mathscr{P}(n-1)$. (Αυτό ονομάζεται *οπισθοδρομική επαγωγή*.)

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ισχύει η

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad \forall x_1, \ldots, x_n > 0 \tag{15}$$

και *επιλέγουμε* $x_n = G_{n-1} := \left(x_1 \cdots x_{n-1}\right)^{1/(n-1)}$. Συνεπώς, με αυτή την συγκεκριμένη τιμή του x_n η (15) γίνεται

$$\left(x_1 \cdots x_{n-1} G_{n-1}\right)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + G_{n-1}}{n}$$

ή, ισοδύναμα, $\left(G_{n-1}^n\right)^{1/n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+G_{n-1}}{n}$ ή $G_{n-1} \leq \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+G_{n-1}}{n}$. Πολλαπλασιάζοντας με n και τα δύο μέλη της ανισότητας έχουμε $nG_{n-1} \leq x_1 + \cdots + x_{n-1} + G_{n-1}$ και συνεπώς

$$G_{n-1} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}. \tag{16}$$

Η τελευταία αυτή ανισότητα είναι ακριβώς η $\mathscr{P}(n-1)$ που θέλαμε να αποδείξουμε. ∎