

Θ Δίνονται οι παρακάτω παρατηρήσεις, αναφορικά με τη Ζήτηση ενός αγαθού Α :

Y (Ποσότητα σε Kg)	X (Τιμή σε €)
100	13
82	13.5
86	13.2
90	13
60	14
70	13.7

- (1) Αν η Ζήτηση έχει συναρτησιακή μορφή $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ με $i=1, 2, \dots, 6$ να επιτιμήσετε με τη μέθοδο Ε.Τ. τους συντελεστές β_0 και β_1 και να γράψετε την επιτιμημένη εξίσωση Παλινδρόμησης.
- (2) Ποιά η ελαστικότητα της Ζήτησης στο σημείο $(\bar{X}, \bar{Y})$?
- (3) Υπολογίστε το τυπικό σφάλμα της Παλινδρόμησης καθώς επίσης και τα τυπικά σφάλματα για κάθε επιτιμή.
- (4) Βρείτε το συντελεστή προσδιορισμού R^2 και σχολιάστε βάσει αποτελέσματος.
- (5) Για την παράμετρο β_1 , να διεξαχθεί διπλευρό έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$, προκειμένου να

αποφανθείτε για τη στατιστική του σημαντικότητας. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε ένα 95% Δ.Ε. για το συντελεστή b_1 . Συνάδει το αποτέλεσμα του παραπάνω στατιστικού ελέγχου που διεξάγατε, με το 95% Δ.Ε. που κατασκευάσατε για το b_1 ; Αιτιολογείτε.

(6) Να κατασκευαστεί ένα 99% Δ.Ε. για τη ζητούμενη ποσότητα όταν η τιμή είναι $x_0 = 13.6 \text{ €}$.

Λύση:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Δίνονται: } t_{0.05,4} = 2.132, \quad t_{0.025,4} = 2.776 \\ t_{0.005,4} = 4.604 \end{array} \right]$$

(1) Είναι : $n = 6$, $\sum_{i=1}^6 X_i = 80.4$, $\sum_{i=1}^6 Y_i = 488$

Άρα, $\bar{X} = \frac{1}{6} \cdot 80.4 = 13.4 \checkmark$ και $\bar{Y} = \frac{1}{6} \cdot 488 = 81.333 \checkmark$

$$\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2 = 0.82 \checkmark, \quad \sum_{i=1}^6 (Y_i - \bar{Y})^2 = 1,029.333 \checkmark$$

$$\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = -28 \checkmark$$

Επομένως :
$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2} = \frac{-28}{0.82} = -34.146 \checkmark$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} = 81.333 - (-34.146) \cdot 13.4 = 538.889 \checkmark$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{Y}_i = 538.889 - 34.146 \cdot X_i}$$

(2)

$$\bar{\varepsilon} = b_1 \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = -34.146 \cdot \frac{13.4}{81.33} = -5.63 \checkmark$$

(3)

Τυπικό σφάλμα Παλινδρόμησης :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 \hat{u}_i^2}{n-2} = \frac{73.236}{4} = 18.309 \checkmark$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{18.309} = 4.279 \checkmark$$

Τυπικά σφάλματα Συντελεστών :

$$\rightarrow \text{Var}(b_0) = \frac{\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^6 X_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2} = \frac{18.309 \cdot 1,078.18}{6 \cdot 0.82} = 4,012.276$$

$$\Rightarrow \text{S.e.}(b_0) = \sqrt{\text{Var}(b_0)} = \sqrt{4,012.276} = 63.342 \checkmark$$

$$\rightarrow \text{Var}(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2} = \frac{18.309}{0.82} = 22.328 \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{S.e.}(b_1) = \sqrt{\text{Var}(b_1)} = \sqrt{22.328} = 4.725 \checkmark$$

(4) $TSS = ESS + RSS \Rightarrow 1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$

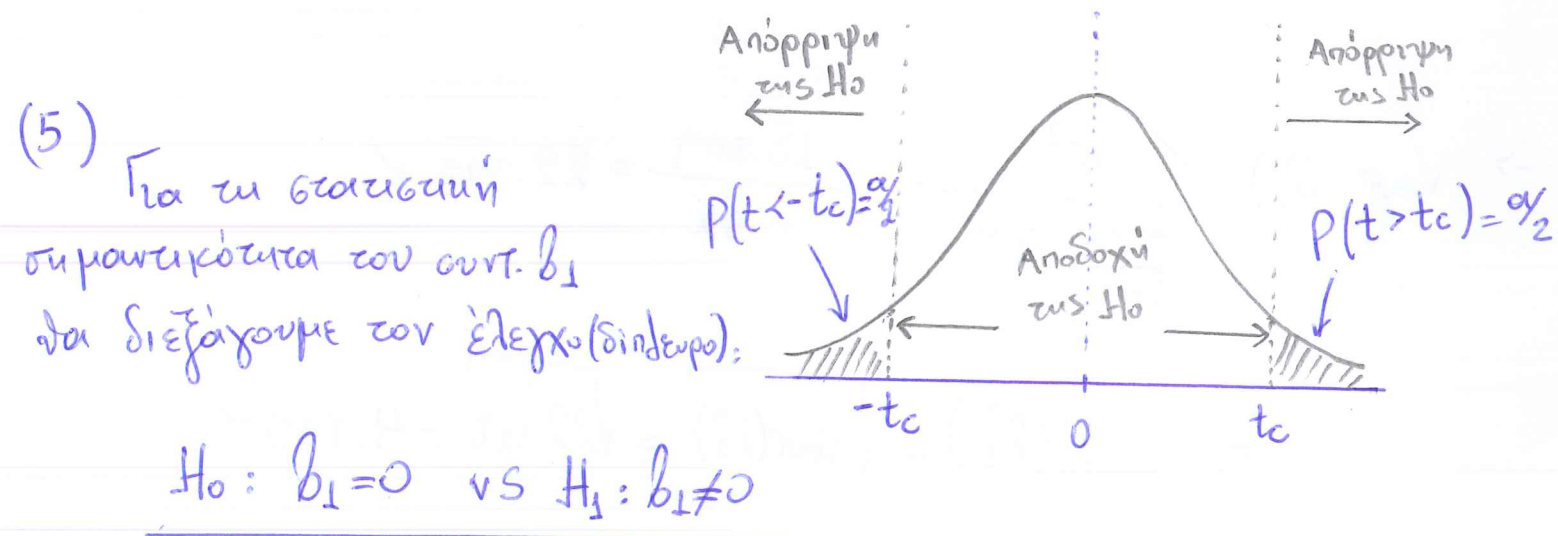
$$\Rightarrow \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^6 \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}$$

Άρα: $R^2 = 1 - \frac{73.236}{1,029.333} = 0.92885$ ή 92.885%

Σχόλιο

Υψηλός βαθμός ερμηνευτικότητας του μοντέλου
ή

"Το % της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μετ. Y_i που εξηγείται από την Παλινδρόμηση είναι υψηλό".



Για το επίπεδο σημαντ. $\alpha = 5\%$ βρίσκουμε την κριτική τιμή της κατανομής του στατιστικού: $t_c = t_{\alpha/2, n-k} = t_{0.025, 4} = 2.776$

Η τιμή του στατιστικού t υπό την H_0 είναι:

$$t = \frac{\hat{b}_1 - b_1^0}{S.e.(\hat{b}_1)} = \frac{-34.146}{4.725} = -7.227 \checkmark$$

Επειδή έχω διπλευρό έλεγχο $\left(\begin{matrix} H_0: b_1=0 \\ H_1: b_1 \neq 0 \end{matrix} \right)$ συγκρίνω

την απόλυτη τιμή $|t|$ του στατιστικού με την κριτική τιμή $t_{\alpha/2, n-k}$, κι έχω:

$$|t| = 7.227 > 2.776 = t_c \Rightarrow \text{η } H_0 \text{ δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή για } \alpha=5\%.$$

$\Rightarrow b_1$, στατ. σημαντικός σε επίν. σην. $\alpha=5\%$

Για το 95% Δ.Ε. του b_1 :

$$\hat{b}_1^L = \hat{b}_1 - t_{0.025, 4} \cdot S.e.(\hat{b}_1) = -34.146 - 2.776 \cdot 4.725 = -47.263$$

$$\hat{b}_1^u = \hat{b}_1 + t_{0.025, 4} \cdot S.e.(\hat{b}_1) = -34.146 + 2.776 \cdot 4.725 = -21.029$$

$$\Rightarrow b_1 \in [-47.263, -21.029] \text{ με πιθαν. } 95\% \quad (1-\alpha)$$

Θεωρώντας το $\emptyset$ στο παραπάνω διάστημα, το αποτέλεσμα αυτό συνάδει μαζί με το αποτέλεσμα του στατ. ελέγχου που διεξάγαμε για το b_1 .

6) Για $X_0 = 13.6$, θα είναι:

$$\hat{Y}_0 = 538.889 - 34.146 \cdot 13.6 = 74.503 \checkmark$$

Επίσης, έχουμε:
$$\text{Var}(\hat{Y}_0 - Y_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2} + 1 \right) =$$

$$= 18.309 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{(13.6 - 13.4)^2}{0.82} + 1 \right) = 22.254$$

Για το 99% Δ.Ε. :

$$\hat{Y}_0 - t_c \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{Y}_0)} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_c \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{Y}_0)}$$

Αρα, θα έχουμε:

$$\text{όπου } t_c = t_{\alpha/2, n-k} = t_{0.005, 4} = 4.604$$

$$74.503 - 4.64 \cdot \sqrt{22.254} \leq Y_0 \leq 74.503 + 4.64 \cdot \sqrt{22.254}$$

$$\Leftrightarrow 52.614 \leq Y_0 \leq 96.392$$

Δηλ. η ποσότητα που προβλέπουμε ότι θα βρεθεί στην περίπτωση που η τιμή είναι 13.6€, βρίσκεται εντός του παραπάνω διαστήματος με πιθαν. 99%.

(3)

$$\hat{Y} = 5.4 + 3.2X$$

(3.1) (1.5)

$$R^2 = 0.26 \quad \text{και} \quad \hat{\sigma} = 6.2$$

$$n = 250$$

(α) Έλεγχος t :

$$H_0: b_1 = 0$$

έναντι

$$H_1: b_1 \neq 0 \quad \text{για} \quad \alpha = 5\%$$

$$t = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{\text{S.E.}(\hat{b}_1)} \stackrel{\text{υπό } H_0}{=} \frac{3.2 - 0}{1.5} = 2.133$$

$$t_c = t_{\alpha/2, n-k} = t_{0.025, 248} = 1.96$$

Επειδή

$$|t| > t_c \Rightarrow \text{η } H_0 \text{ απορρίπτεται έναντι της } H_1 \text{ για } \alpha = 5\%$$

↑
γιατί πρόκειται
για διμερή
έλεγχο

$$(b) \hat{b}_1^U = \hat{b}_1 + t_c \cdot \text{S.E.}(\hat{b}_1) = 3.2 + 1.96 \cdot 1.5 = 6.14$$

$$\hat{b}_1^L = \hat{b}_1 - t_c \cdot \text{S.E.}(\hat{b}_1) = 3.2 - 1.96 \cdot 1.5 = 0.26$$

$$b_1 \in [0.26, 6.14]$$

(*) → Παρατηρώ ότι η τιμή $b_1 = 0$ δεν βρίσκεται εντός του διαστήματος όπως αναμενόταν!

(2) Ν.Σ.Ο. ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 στην παλινδρόμηση της Y επί της X είναι ίσος με το τετράγωνο της τιμής της συσχέτισης δείγματος ανάμεσα στην X και στην Y , δηλ. ότι $R^2 = r_{xy}^2$

$$\text{Είναι } R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (1)$$

$\hat{Y}_i$ ← $\frac{SS_{\text{Reg}}}{SS_{\text{Tot}}}$

όμως:

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} + \hat{b}_1 X_i - \bar{Y})^2$$

$\hat{b}_0$ → η ευθεία του b_0 με LS

$$= \sum_{i=1}^n [\hat{b}_1 (X_i - \bar{X})]^2 = \hat{b}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 =$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right]^2 \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 =$$

$\hat{b}_1$ ←

$$= \frac{\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2)$$

↗

$$(1) \xRightarrow{(2)} R^2 = \dots$$

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\frac{1}{n^2} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\left[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]^2} = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\left[\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]^2} =$$

$$= \left[\frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \right]^2 = r_{xy}^2$$

Δείχνουμε τώρα
από κει
μεταξύ τους

(Δείχνουμε's Surtegeon's Sugxetion)

Surtegeon's Pearson

$$r(x, y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$