

Άσκηση στην Κανονική Κατανομή:

→ Εταιρεία παράγει μεταλλικούς άξονες των οποίων το μήκος ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, με $\mu = 0.2508$ cm και $\sigma = 0.0015$ cm. Αν, για να είναι αποδεκτός στην αγορά ο άξονας πρέπει να έχει μήκος 0.2500 ± 0.0015 cm

(i) Ποό το % των παραχόμενων άξόνων πληροί τις προδιαγραφές?

(ii) Αν μπορούσαμε να διορθώσουμε τη γραμμή παραγωγής σε ποό μέτρο θα πρέπει να στοχεύουμε(;) ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι παραχόμενοι μη αποδεκτοί άξονες;

Λύση

(i) Χ.τ.μ. που παρίστα το μήκος του παραχόμενου μεταλλικού άξονα

$$\text{Τότε } X \sim N(\mu = 0.2508, \sigma^2 = 0.0015^2)$$

$$\text{Ζητάμε την } P(0.2485 < X < 0.2515) =$$
$$P\left(\frac{0.2500 - 0.0015}{0.0015} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0.2500 + 0.0015}{0.0015}\right)$$

=

$$= P(X < 0.2515) - P(X < 0.2485) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0.2515} \frac{1}{0.0015\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 0.0015^2} (x - 0.2508)^2} dx -$$

$$\int_{-\infty}^{0.2485} \frac{1}{0.0015\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 0.0015^2} (x - 0.2508)^2} dx =$$

$$= \Phi(0.2515) - \Phi(0.2485) = \dots$$

(ii) Στην ελαχιστοποίηση της σ

$$=$$

Κ.Θ.Θ.(Εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού
Θεωρήματος στον υπολογισμό Πιθαν/των)Σ' ένα πληθυσμό με $\mu_Y = 100$ και $\sigma_Y^2 = 43$,

με χρήση του Κ.Θ.Θ., να βρείτε:

$$(i) \quad P(\bar{Y} < 101), \text{ όταν } n = 100 \quad \leftarrow \text{η μεγάλη!}$$

$$\bar{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2/n), \text{ αφού } n = 100$$

$$\text{Άρα: } \bar{Y} \sim N(100, 0.43) \quad \xrightarrow{\frac{43}{100}}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } P(\bar{Y} < 101) &= P\left(\frac{\bar{Y} - 100}{\sqrt{0.43}} < \frac{101 - 100}{\sqrt{0.43}}\right) = \\ &\quad \xrightarrow{\sigma_{\bar{Y}}} \quad \xrightarrow{\mu_Y} \\ &\approx \Phi(1.525) = 0.9364 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad P_r(101 < \bar{Y} < 103), \text{ όταν } n = 64 \quad \leftarrow \text{η μεγάλη!}$$

$$\rightarrow \text{και } \sigma_{\bar{Y}}^2/n = \frac{43}{64} = 0.6719$$

$$P_r(101 < \bar{Y} < 103) = P_r\left(\frac{101 - 100}{\sqrt{0.6719}} < \frac{\bar{Y} - 100}{\sqrt{0.6719}} < \frac{103 - 100}{\sqrt{0.6719}}\right)$$

$$\approx \Phi(3.6599) - \Phi(1.2200) = 0.9999 - 0.8888 = 0.1111$$

n megano!

$$\boxed{n=165}$$

(4)

$$\sigma_y^2/n = \frac{43}{165} = 0.2606$$

$$(iii) \quad P(\bar{y} > 98) = 1 - P(\bar{y} \leq 98) =$$

$$= 1 - Pr\left(\frac{\bar{y} - 100}{\sqrt{0.2606}} \leq \frac{98 - 100}{\sqrt{0.2606}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(-3.9178) = \Phi(3.9178) = 1.000 \checkmark$$

⊙ Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid με μέσο μ_x και διακύμανση σ_x^2 .
 (ανεξάρτητες και αυτόνομα κατανοημένες)

N.S.O.

$$(i) E[(X_i - \bar{X})^2] = \text{Var}(X_i) + \text{Var}(\bar{X}) - 2 \cdot \text{Cov}(X_i, \bar{X})$$

$$(ii) \text{Cov}(\bar{X}, X_i) = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

(iii) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα (i), (ii),
 v.s.o. $E(S_x^2) = \sigma_x^2$, όπου S_x^2 η δειγματική διακύμανση

Απόδειξη:

προσθαφαίνω
 το μ_x

$$\begin{aligned} (i) \text{ Είναι } E[(X_i - \bar{X})^2] &= E[(X_i - \mu_x) - (\bar{X} - \mu_x)]^2 = \\ &= E[(X_i - \mu_x)^2 + (\bar{X} - \mu_x)^2 - 2(X_i - \mu_x)(\bar{X} - \mu_x)] = \\ &= E(X_i - \mu_x)^2 + E(\bar{X} - \mu_x)^2 - 2 \cdot E[(X_i - \mu_x)(\bar{X} - \mu_x)] = \\ &= \text{Var}(X_i) + \text{Var}(\bar{X}) - 2 \cdot \text{Cov}(X_i, \bar{X}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\bar{X}, X_i) &= E[(X_i - \mu_x) \cdot (\bar{X} - \mu_x)] = \\
 &= E\left[\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} - \mu_x\right) \cdot (X_i - \mu_x)\right] = \\
 &= E\left[\left(\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mu_x)}{n}\right) \cdot (X_i - \mu_x)\right] = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot E\left(\overset{i=j}{X_i - \mu_x}\right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n E[(X_j - \mu_x) \cdot (X_i - \mu_x)] = \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \text{Var}(X_i) + \frac{1}{n} \cdot \underset{0}{\text{Cov}(X_j, X_i)} = \frac{1}{n} \text{Var}(X_i) = \left(\frac{\sigma_x^2}{n}\right) \checkmark
 \end{aligned}$$

(X_i, X_j ανεξ.

(iii) Γνωρίζουμε ότι : $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Άρα, θα είναι: $E(S_x^2) = E\left[\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] =$

(7)

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i - \bar{X})^2 \quad \underline{(i)} \quad \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\text{Var}(X_i) + \text{Var}(\bar{X}) - 2\text{Cov}(X_i, \bar{X}) \right)$$

$$\underline{(ii)} \quad \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sigma_X^2 + \frac{\sigma_X^2}{n} - 2 \cdot \frac{\sigma_X^2}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sigma_X^2 - \frac{\sigma_X^2}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{(n-1) \cdot \sigma_X^2}{n} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{(n-1)}}{\cancel{(n-1)} \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_X^2 = \frac{1}{n} \cdot n \sigma_X^2 = \sigma_X^2 \quad \checkmark$$

! Δηλ. ο S_X^2 είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ_X^2 ,
αφού $E(S_X^2) = \sigma_X^2 \quad \checkmark$.

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + u_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Κλαστικές υποθέσεις: (1) $E(u_i | X_i) = 0, \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

$$(2) \text{var}(u_i | X_i) = E(u_i^2 | X_i) = \sigma^2, \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

$$(3) \text{Cov}(u_i, u_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

$$(4) u_i \sim N(0, \sigma^2), \quad \forall i=1, 2, \dots, n.$$

→ Αν παραβιαστεί η υπόθεση (2), π.χ.

$$\text{var}(u_i | X_i) = E(u_i^2 | X_i) = \sigma^2 X_i, \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

τότε τι γίνεται?

→ (i) Η γραμμικότητα που αναφέρεται; (ii) Πώς εφαρμόζεται;

(i) Στους συντελεστές του υποδείγματος

(ii) Οι παράγωγοι της Y_i ως προς τους συντελεστές είναι ανεξάρτητες αυτών των συντελεστών-παραμέτρων

$$\text{δηλ.} \quad \frac{\partial Y_i}{\partial b_0} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial Y_i}{\partial b_1} = X_i$$

Ισχυρή Εξωγένεια

(i) $E(u_i | X_i) = 0$

και (ii) $E(X_i \cdot u_i) = 0$ (οποιαδήποτε συνάρτηση των X_i δεν σχετίζεται με το διαταρακτικό όρο)

○ Ομοσκεδαστικότητα : $\text{Var}(u_i | X_i) = \sigma^2, \forall i$

○ Οι διαταρακτικοί όροι δεν συσχετίζονται μεταξύ τους.

δηλ.
$$E(u_i, u_j) = \begin{cases} \sigma_u^2, & i=j, \forall i=j \\ 0, & i \neq j, \forall i \neq j \end{cases}$$

○ $u_i | X_i \sim N(0, \sigma^2), \forall i$

$\text{Cov}(X_i, u_i | X_i) = 0$, X_i γνωστή