

(1)

Θεωρούμε το υπόδειγμα:  $Y_i = \alpha + u_i, \quad i=1, 2, \dots, n$

Ν.δ.ο.  $\hat{\alpha}_{LS} = \bar{Y}$ , όπου  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$

Θεωρούμε το κλίσης υπόδειγμα:

$$Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + u_i, \quad \text{με } X_i = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

Σύστημα Κανονικών Εξισώσεων

$$\begin{cases} (1) & \sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \\ (2) & \sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

Α. επειδή  $\sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \overbrace{0+0+\dots+0}^{n \text{-φορές}} = 0$

από την (1)  $\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha}_{LS} = \bar{Y}}$

(2) 
$$y_i = b_0 + b_1 x_i + u_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

(i) β.δ.ο. 
$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0.$$

Πράγματι,

από την  $\hat{I}_n$  κανονική εξίσωση θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i - n\hat{b}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{b}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{b}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)] = 0$$

$$y_i - \hat{y}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \checkmark$$



(2)

3/

(ii) O.S.O.  $\boxed{\sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0}$   
 $y_i = b_0 + b_1 x_i + u_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$

Από τη  $Q_n$  κανονική επίλυση:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = \hat{b}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

↓

(όλα στο μέλος)

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{b}_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (y_i x_i - \hat{b}_0 x_i - \hat{\beta}_1 x_i^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{b}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{y}_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \hat{u}_i = 0 \quad \checkmark$$

(3)

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + u_i$$

Δείγμα 500 παρατηρήσ.

$$n = 500$$

Δίνονται:

$$\sum_{i=1}^{500} X_i = 25.000$$

$$\sum_{i=1}^{500} Y_i = 100.000$$

$$\sum_{i=1}^{500} (X_i - \bar{X})^2 = 66.000$$

$$\sum_{i=1}^{500} (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) = 200.000$$

$$\sum_{i=1}^{500} (Y_i - \bar{Y})^2 = 1.200.000$$

Είναι

(\*) Βρείτε τα  $b_0^{\wedge}$ ,  $b_1^{\wedge}$  με τη μέθοδο ΕΤ.

$$b_0^{\wedge} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (1)$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \quad (2) = \frac{200.000}{66.000} \approx 3,0303$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i = \frac{1}{500} \cdot 25.000 = 50$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_i Y_i = \frac{1}{500} \cdot 100.000 = 200$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \hat{\beta}_0 \stackrel{(1)}{=} 200 - 3,0303 \cdot 50 \approx 48,485$$

Επιτιμημένη Εξίσωση:  $\hat{Y}_i = 48,485 + 3,0303 \cdot X_i$

(4) N.S.O.  $\hat{\beta}_0$  είναι αμερόληπτος για  $\omega$

γραμμικό υπόδειγμα  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$

Είναι  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$  (Αρχει ν.δ.ο.  $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ )

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) = E\left[\left(\beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right) - \hat{\beta}_1 \bar{x}\right] =$$

✓  
πήραμε μέσες τιμές  
και για δύο μέρη

↓  
Διευκρινίζουμε  
το  
 $\bar{y}$

$$= \beta_0 + E(\beta_1 - \hat{\beta}_1) \bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(u_i)$$

$$= \beta_0 + \left(\underbrace{E(\beta_1)}_{\beta_1} - \hat{\beta}_1\right) \cdot \bar{x} + 0$$

$$= \beta_0$$

⇒ Χρησιμοποιούμε ότι  $E(u_i) = 0$  και  $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$



(5) Να χαρακτηριστούν ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ) οι παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις σας.

α) Αφού η συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών,  $X$  και  $Y$ , λαμβάνει τιμές μεταξύ  $-1$  και  $1$ , η συνδιακύμανση μεταξύ των  $X$  και  $Y$  θα λαμβάνει τιμές εντός αυτού του ορίου.

→ Η πρόταση αυτή είναι ψευδής (Ψ). Η συνδιακύμανση μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Η τιμή της εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών. Αντιθέτως, ο συντελεστής συσχέτισης, είναι ένας καθαρός αριθμός, δεν εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης.

β) Αν η συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών είναι ίση με το μηδέν, τότε οι δύο αυτές μεταβλητές δεν θα έχουν καμία σχέση.

→ Η πρόταση είναι ψευδής (Ψ). Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν γραμμική σχέση μεταξύ τους οι δύο μεταβλητές. Ο συντελεστής συσχέτισης δείχνει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών. π.χ. μπορεί  $r=0$  και  $Y=X^2$ .