⊙ Απόδειξη της σχέσης : $\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$

Εξ ορισμού $\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2$, όπου $\mu = EX$

Άρα : $\mathrm{Var}X = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) =$

$$= EX^2 - 2\mu EX + E\mu^2 =$$

$$= EX^2 - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 =$$

$$= EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = EX^2 - \mu^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$$

⊙ Θ.δ.ο. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$

Είναι : $\mathrm{Var}(aX+b) = E[\underbrace{aX+b}_{Y} - \underbrace{E(aX+b)}_{EY}]^2$

$$E(Y - \underbrace{E(Y)}_{\mu})^2$$

$$= E(aX + b - aEX - Eb)^2$$

$$= E(aX + \cancel{b} - aEX - \cancel{b})^2$$

$$= E(a(X - EX))^2 = a^2 \cdot E(X - EX)^2$$

$$= a^2 \cdot \mathrm{Var}X$$

→ Αν η κατανομή της τ.μ. T δίνεται από:

$$f_T(t) = \begin{cases} 1/10 & , \quad 5 \leq t \leq 15 \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

(i) Να βρεθεί η μέση τιμή E(T) της τ.μ. T

(ii) Να βρείτε και τη διακύμανση σ^2 και την τυπική απόκλιση σ.

Λύση

(i)

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_T(t)\, dt = \int_5^{15} t \cdot \frac{1}{10}\, dt = \frac{1}{10}\left[\frac{t^2}{2}\right]_5^{15} =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{15^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right] = \frac{1}{10}\left(\frac{225-25}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{10}} \cdot 10\cancel{0} = 10 \quad (1)$$

(ii) Ως γνωστόν, είναι: $\sigma^2 = E(T^2) - [E(T)]^2 \quad (2)$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f_T(t)\, dt = \int_5^{15} t^2 \cdot \frac{1}{10}\, dt = \frac{1}{10}\left[\frac{t^3}{3}\right]_5^{15} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{15^3}{3} - \frac{5^3}{3}\right) = \frac{325}{3} \simeq 108.333 \quad (3)$$

Οπότε, $\sigma^2 \overset{(3)}{\underset{(1)}{=}} 108.333 - 10^2 \simeq \underline{8.333} \quad (4)$ ✓

⇒ Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8.333} \simeq \underline{2.887}$ ✓

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Εύρεση Μέσης Τιμής και Διακύμανσης μιας συνεχούς τ.μ. X, όταν δίνεται η συν. π.π. της.

→ Έστω X τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

○ Για τη Μέση Τιμή μ :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{(x+1)}{2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2+x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{6} = \frac{1}{3} \checkmark \quad (1)$$

○ Για τη Διακύμανση :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad (2)$$

Όμως $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)dx =$

↗

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{8}\,4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark \quad (3)$$

Άρα,

$$(2) \xrightarrow[(3)]{(1)} Var(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \checkmark$$

Aς είναι X τ.μ. με ροπές $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$ κ.ο.κ.

(i) Θ.δ.ο. $E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3[E(X^2)\cdot E(X)] + 2[E(X)]^3$

Πράγματι:

$$E(X-\mu)^3 = E\left((X-\mu)^2(X-\mu)\right) = E\left[(X^2-2\mu X+\mu^2)(X-\mu)\right]$$

$$= E\left[X^3 - 2\mu X^2 + \mu^2 X - \mu X^2 + 2\mu^2 X - \mu^3\right] =$$

$$= E(X^3) - \underbrace{2\mu E(X^2)} + \mu^2 E(X) - \underbrace{\mu E(X^2)} + 2\mu^2 E(X) - E(\mu^3)$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3 =$$

$$= E(X^3) - 3E(X)\cdot E(X^2) + 3\mu^2\cdot\mu - \mu^3$$

$$= E(X^3) - 3[E(X^2)\cdot E(X)] + 2\mu^3$$

$$= E(X^3) - 3[E(X^2)\cdot E(X)] + 2[E(X)]^3$$

✓

(ii) Θ.δ.ο.

$$E(X-\mu)^4 = E(X^4) - 4\left[E(X^3)\cdot E(X)\right] + 6\left[E(X)\right]^2 \cdot E(X^2) - 3\left[E(X)\right]^4$$

Πράγματι:

$$E(X-\mu)^4 = E\left[(X-\mu)^3 (X-\mu)\right] =$$

$$= E\left[(X^3 - 3X^2\cdot\mu + 3X\cdot\mu^2 - \mu^3)(X-\mu)\right]$$

$$= E\left[X^4 - 3X^3\cdot\mu + 3X^2\cdot\mu^2 - X\mu^3 - X^3\cdot\mu + 3X^2\mu^2 - 3X\mu^3 + \mu^4\right]$$

$$= E(X^4) - 4E(X^3)\cdot E(X) + 6E(X^2)\cdot E(X)^2 - 4E(X)\cdot E(X)^3 + E(X)^4$$

$$= E(X^4) - 4\left[E(X)\right]\cdot\left[E(X^3)\right] + 6\left[E(X)\right]^2\cdot\left[E(X^2)\right] - 3\left[E(X)\right]^4$$

$$Cov(X,Y) = E\left((X-EX)(Y-EY)\right) = E(XY) - EX \cdot EY$$

① <u>Συντελεστής συσχέτισης</u>

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX \cdot VarY}} = \frac{\sigma_{x \cdot y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = Corr(x,y)$$

↓

Δείχνει πώς σχετίζονται γραμμικά τα X και Y

(Διαγράμματα)

με $-1 \leq \rho \leq 1$

Σοβ

→ Όταν X, Y ανεξάρτητες Τ.Μ. και $Cov(x,y) = 0$

τότε $Cov(x,y) = 0$

γιατί

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$