Εισαγωγή στην οικονομετρία (1404)

Διάλεξη 12

Αγγελος Αλεξόπουλος
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών -
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
angelos@aueb.gr

Περίγραμμα Διάλεξης

- Στατιστική Επαγωγή
  - Διαστήματα Εμπιστοσύνης
    - Γνωστή διακύμανση διαταρακτικού όρου σ^2
    - Άγνωστη διακύμανση διαταρακτικού όρου σ^2
  - Έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων
    - Μικρά vs. Μεγάλα δείγματα
    - Μονόπλευρος vs. Δίπλευρος στατιστικός έλεγχος

Σκοπός Οικονομετρίας

- **Εκτίμηση οικονομικών σχέσεων (ποσοτικοποίηση)**

- Έλεγχος υποθέσεων (οικονομικών σχέσεων) – Στατιστική Επαγωγή

- Πρόβλεψη οικονομικών μεταβλητών

Εκτίμηση οικονομικών σχέσεων

Κλασικές υποθέσεις

Αν X_i είναι σταθερή σε επαναλαμβανόμενα δείγματα (προκαθορισμένη - fixed)

1. Γραμμικότητα ως προς τις παραμέτρους
2. $E(u_i) = 0$ or $E(u_i|x_i) = 0$ $\forall i$
3. $var(u_i) = E(u_i^2) = \sigma^2$ or $var(u_i|x_i) = E(u_i^2|x_i) = \sigma^2, \forall i$
4. $cov(u_i, u_j) = 0, \forall i \neq j$
5. $u_i \sim N(0, \sigma^2), \forall i$

Εκτίμηση οικονομικών σχέσεων

Απλό γραμμικό υπόδειγμα: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, i = 1, \dots, n$

Εκτιμημένο υπόδειγμα: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \ \forall i$

Εκτιμητές ΕΤ: $\hat{\beta}_0 = \overline{\mathrm{Y}} - \hat{\beta}_1 \overline{\mathrm{X}}$ και $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ ή $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Κατάλοιπα: $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

Ιδιότητες: $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0, \sum_{i=1}^{n} X_i \hat{u}_i = 0, \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \hat{u}_i = 0$

Εκτίμηση οικονομικών σχέσεων

✓Θεώρημα Gauss-Markov: οι εκτιμητές ΕΤ $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ αποτελούν τους **καλύτερους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές** και αναφέρονται ως **BLUE** (best linear unbiased estimator)

✓ Όταν $u_i \sim N(0,\sigma^2), \forall i$ και X_i προκαθορισμένες τότε

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left[E(\hat{\beta}_0), var(\hat{\beta}_0)\right] \sim N\left[\beta_0, \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right]$$

και

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left[E(\hat{\beta}_1),\ var(\hat{\beta}_1)\right] \sim N\left[\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right]$$

✓Αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανση διαταρακτικού όρου $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k}$

✓Συντελεστής προσδιορισμού (coefficient of determination)

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$0 < R^2 < 1$$

Σκοπός Οικονομετρίας

- Εκτίμηση οικονομικών σχέσεων (ποσοτικοποίηση)
- **Έλεγχος υποθέσεων (οικονομικών σχέσεων) – Στατιστική Επαγωγή**
- Πρόβλεψη οικονομικών μεταβλητών

Στατιστική επαγωγή

- **Διάστημα εμπιστοσύνης**: διάστημα τιμών για τον συντελεστή του γραμμικού υποδείγματος εντός του οποίου είναι πιθανό να βρίσκεται η αληθινή τιμή του συντελεστή στον πληθυσμό με βάση τις εκτιμήσεις που παίρνουμε από τον εκτιμητή στο δείγμα με κάποια πιθανότητα
  - Απαιτείται η γνώση της κατανομής των εκτιμητών του υποδείγματος

- **Έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων**: έλεγχος αν οι συντελεστές ενός υποδείγματος παίρνουν συγκεκριμένες τιμές
  - Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας: έλεγχος αν ο συντελεστής κλίσης είναι ίσος με το μηδέν

Κατανομή εκτιμητή ΕΤ

- Έστω το γραμμικό υπόδειγμα $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i, i = 1, \dots, n$
- Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι κλασικές υποθέσεις για τον διαταρακτικό όρο u_i και ότι κατανέμεται κανονικά $u_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\forall i$ τότε και οι εκτιμητές ΕΤ θα κατανέμονται κανονικά γύρω από τις αληθινές τους τιμές στον πληθυσμό

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left[E(\hat{\beta}_0), var(\hat{\beta}_0)\right] \sim N\left[\beta_0, \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right]$$

και

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left[E(\hat{\beta}_1), var(\hat{\beta}_1)\right] \sim N\left[\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right]$$

Τυπικό σφάλμα εκτιμητή $\hat{\beta}_1$

- Η διαφορά του εκτιμητή $\hat{\beta}_1$ από την θεωρητική του τιμή στον πληθυσμό β_1 αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 \sim N\left[0,\ var\left(\hat{\beta}_1\right)\right]$$

- Επειδή η μεταβλητή $\hat{\beta}_1 - \beta_1$ έχει διακύμανση που εξαρτάται από τις τιμές της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου σ^2 και της ανεξάρτητης μεταβλητής X_i θα την τυποποιήσουμε διαιρώντας την με το **τυπικό σφάλμα** του εκτιμητή $\hat{\beta}_1$ (τυπική απόκλιση)

$$se\left(\hat{\beta}_1\right) \equiv \sqrt{var\left(\hat{\beta}_1\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}$$

Στατιστικό κριτήριο - γνωστή σ^2

- Αυτή η τυποποιημένη μεταβλητή αναφέρεται στην κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης (και στους ελέγχους υποθέσεων) ως **στατιστικό κριτήριο** ή **στατιστική** και η κατανομή του ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$z \equiv \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}} \sim N(0,1)$$

- Η διακύμανση του διαταρακτικού όρου σ^2 θεωρείται **γνωστή**!

Στατιστικό κριτήριο – άγνωστη σ^2

- Ωστόσο η διακύμανση του διαταρακτικού όρου $\boldsymbol{\sigma^2}$ αποτελεί **άγνωστη** παράμετρο του γραμμικού υποδείγματος και εκτιμάται με βάση τα κατάλοιπα

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k}$$

- Αν η διακύμανση αντικατασταθεί με μια εκτίμηση της τότε το κριτήριο της τυποποιημένης μεταβλητής $\hat{\beta}_1 - \beta_1$, z, ακολουθεί την t-student κατανομή με $n-k$ βαθμούς ελευθερίας και δίνεται ως εξής

$$t \equiv \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}} \sim t_{(n-k)}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης

- Έχοντας ορίσει τα κριτήρια z και t και προσδιορίσει τις κατανομές τους μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης εντός του οποίου θα βρίσκεται η αληθινή τιμή του συντελεστή β_1 στον πληθυσμό με κάποια πιθανότητα $1-\alpha$
- Ο εκτιμητής ΕΤ $\hat{\beta}_1$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του β_1 και επομένως το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι ένα κλειστό και συμμετρικό διάστημα γύρω από την αληθινή τιμή του β_1 με ανώτερη $\hat{\beta}_1^U$ τιμή και κατώτερη $\hat{\beta}_1^L$ (U: Upper, L: Lower)

$$\hat{\beta}_1^L \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1^U$$

  - Δεξιά και αριστερά των ορίων του διαστήματος εμπιστοσύνης $\hat{\beta}_1^L$ και $\hat{\beta}_1^U$ θα βρίσκεται το $\alpha/2$ των τιμών της κατανομής του $\hat{\beta}_1$
  - α επίπεδο πιθανότητας (επίπεδο σημαντικότητας ή σφάλμα τύπου I): σφάλμα η αληθινή τιμή του β_1 να μη συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα εμπιστοσύνης

Διάστημα εμπιστοσύνης - γνωστή σ^2

- Ας υποθέσουμε ότι η διακύμανση σ^2 είναι γνωστή τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης $\hat{\beta}_1^L \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1^U$ με βάση το κλειστό διάστημα τιμών του στατιστικού κριτηρίου z (τυποποιημένη κανονική κατανομή)
- Το διάστημα εντός του οποίου θα βρίσκεται η αληθινή τιμή του z με κάποια πιθανότητα ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{P}(-z_c \leq \mathrm{z} \leq z_c) = 1 - a$$

όπου z_c (ή $z_{a/2}$) και $-z_c$ (ή $-z_{a/2}$) οι κριτικές τιμές της τυποποιημένης κανονικής κατανομής δεξιά και αριστερά των οποίων θα βρίσκεται το $\frac{a}{2}$ των τιμών της κατανομής του κριτηρίου z

Κανονική κατανομή: συμμετρική επομένως

- $\mathrm{P}(\mathrm{z} < -z_c) = a/2$
- $\mathrm{P}(\mathrm{z} > z_c) = a/2$

Διάστημα εμπιστοσύνης - γνωστή σ^2

$$\mathrm{P}(-z_c \leq \mathrm{z} \leq z_c) = 1 - a$$

- Αντικαθιστώντας $z = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\widehat{\beta}_1)}$ στην παραπάνω σχέση, όπου $\mathrm{se}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{var(\hat{\beta}_1)}$, έχουμε:

$$\Pr\left(-z_c \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} \leq z_c\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Pr\left(z_c \geq -\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} \geq -z_c\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

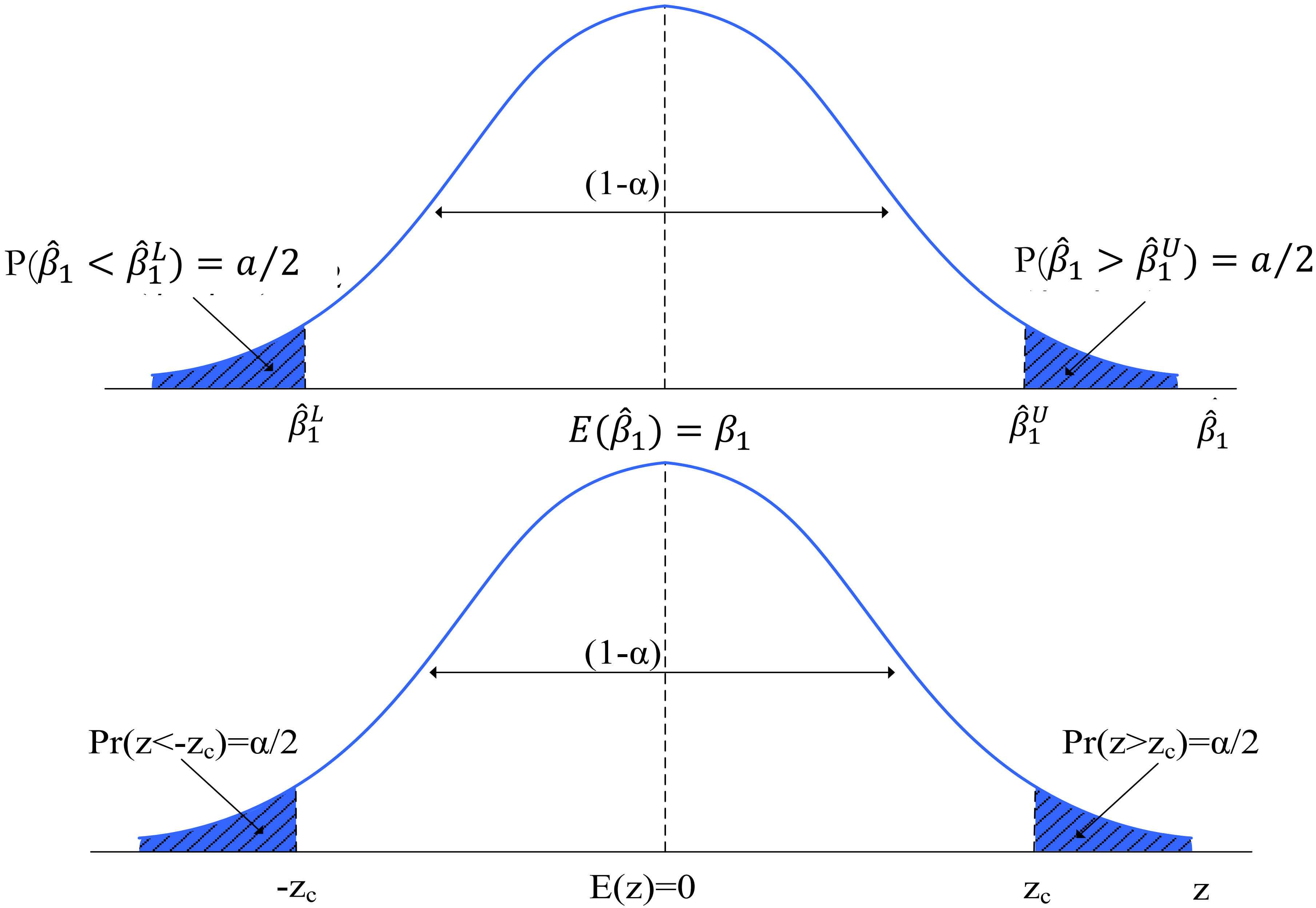
$$\Pr\left(\hat{\beta}_1 + z_c \cdot se(\hat{\beta}_1) \geq \beta_1 \geq \hat{\beta}_1 - z_c \cdot se(\hat{\beta}_1)\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Pr\left(\hat{\beta}_1 - z_c \cdot se(\hat{\beta}_1) \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + z_c \cdot se(\hat{\beta}_1)\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Pr(\hat{\beta}_1^L \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1^U) = 1 - \alpha$$

Όπου $\hat{\beta}_1^L = \hat{\beta}_1 - z_c \cdot se(\hat{\beta}_1)$ και $\hat{\beta}_1^U = \hat{\beta}_1 + z_c \cdot se(\hat{\beta}_1)$ αποτελούν αντίστοιχα το κάτω και το άνω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης β_1

Διάστημα εμπιστοσύνης για τον συντελεστή $\hat{\beta}_1$



Διάστημα εμπιστοσύνης- άγνωστη σ^2

- Ανάλογα μπορεί να υπολογιστεί το διάστημα εμπιστοσύνης του συντελεστή β_1 όταν η διακύμανση του διαταρακτικού όρου σ^2 είναι άγνωστη χρησιμοποιώντας το κριτήριο t που ακολουθεί την t-student κατανομή

$$\Pr\left(\hat{\beta}_1 - t_c \cdot se(\hat{\beta}_1) \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_c \cdot se(\hat{\beta}_1)\right) = 1 - \alpha$$

όπου $-t_c$ (ή $-t_{a/2,n-k}$) και t_c (ή $t_{a/2,n-k}$) οι κριτικές τιμές της t-student με $n - k$ βαθμούς ελευθερίας

- t-student κατανομή: συμμετρική επομένως
  - $P(t < -t_c) = a/2$ και $P(t > t_c) = a/2$

και $\hat{\beta}_1^L = \hat{\beta}_1 - t_c \cdot se(\hat{\beta}_1)$ και $\hat{\beta}_1^U = \hat{\beta}_1 + t_c \cdot se(\hat{\beta}_1)$ αποτελούν αντίστοιχα το κάτω και το άνω όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης β_1

Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων

Στάδια στατιστικών ελέγχων:

i. Ορισμός δύο αντίθετων υποθέσεων:
   - μηδενική υπόθεση (null hypothesis), H_0 και εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis) , H_1

ii. Υιοθέτηση ενός στατιστικού κριτηρίου (test statistic) για την διεξαγωγή του ελέγχου και ο προσδιορισμός της στατιστικής της κατανομής κάτω από τη μηδενική υπόθεση

iii. Υιοθέτηση ενός κανόνα απόφασης για την απόρριψή ή μη της μηδενικής υπόθεσης

Μηδενική & εναλλακτική υπόθεση

- Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε κάποια στατιστική υπόθεση για το συντελεστή β_1 του απλού γραμμικού υποδείγματος

✓ Δίπλευρος ή δικατάληκτος έλεγχος (two tailed test)

$H_0: \beta_1 = \beta_1^0$

$H_1: \beta_1 \neq \beta_1^0$

✓ Μονόπλευρος ή μονοκατάληκτος έλεγχος (one tailed test)

$H_0: \beta_1 \leq \beta_1^0$ ή $\beta_1 = \beta_1^0$

$H_1: \beta_1 > \beta_1^0$

και

$H_0: \beta_1 \geq \beta_1^0$ ή $\beta_1 = \beta_1^0$

$H_1: \beta_1 < \beta_1^0$

Στατιστικά κριτήρια

- Η απόρριψη ή η αποδοχή της H_0 για κάποιο συντελεστή του υποδείγματος γίνεται με βάση κάποιο στατιστικό κριτήριο
  - z (γνωστή σ^2/μεγάλα δείγματα) και t (άγνωστη σ^2/μικρά δείγματα)

- Απαραίτητη η γνώση της θεωρητικής κατανομής του στατιστικού κριτηρίου κάτω από την H_0
  - Βάση της κατανομής μπορούν να υπολογιστούν οι πιθανότητες απόρριψής ή μη της H_0

Κανόνας απόφασης

	Αληθής $\boldsymbol{H_0}$	**Ψευδής $\boldsymbol{H_0}$**
Απόρριψη $\boldsymbol{H_0}$	Σφάλμα τύπου Ι	Σωστή απόφαση
Αποδοχή $\boldsymbol{H_0}$	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου ΙΙ

- Σωστή απόφαση: να γίνει αποδεκτή η H_0 όταν είναι σωστή ή να απορριφθεί όταν είναι λανθασμένη
- $\alpha = P(\text{Σφάλμα τύπου Ι}) = \mathrm{P}(\text{Απόρριψη } H_0 | \text{Αληθής } H_0)$
  - α η μέγιστη πιθανότητα του σφάλματος τύπου Ι όταν η H_0 είναι αληθής ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** & **μέγεθος κριτηρίου** (significance level & size of the test)
- $\beta = P(\text{Σφάλμα τύπου ΙΙ}) = \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 | \text{Αληθής } H_1)$
  $= \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 | \text{Ψευδής } H_0)$

Κανόνας απόφασης

	Αληθής H_0	**Ψευδής H_0**
Απόρριψη H_0	Σφάλμα τύπου Ι	Σωστή απόφαση
Αποδοχή H_0	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου ΙΙ

- Η πιθανότητα απόρριψης της H_0 ενώ η H_1 είναι αληθής μπορεί να υπολογιστεί με βάση την πιθανότητα του σφάλματος τύπου ΙΙ και ονομάζεται **ισχύς ή δύναμη κριτηρίου** (power of the test):

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{Απόρριψη } H_0 | \text{Αληθής } H_1) &= 1 - \mathrm{P}(\text{Αποδοχή } H_0 | \text{Αληθής } H_1) \\ &= 1 - P(\text{Σφάλμα τύπου ΙΙ}) = 1 - \beta \end{aligned}$$

- Η ελαχιστοποίηση του σφάλματος τύπου ΙΙ για κάποιο επίπεδο σημαντικότητας α σημαίνει μεγιστοποίηση της ισχύς του κριτηρίου

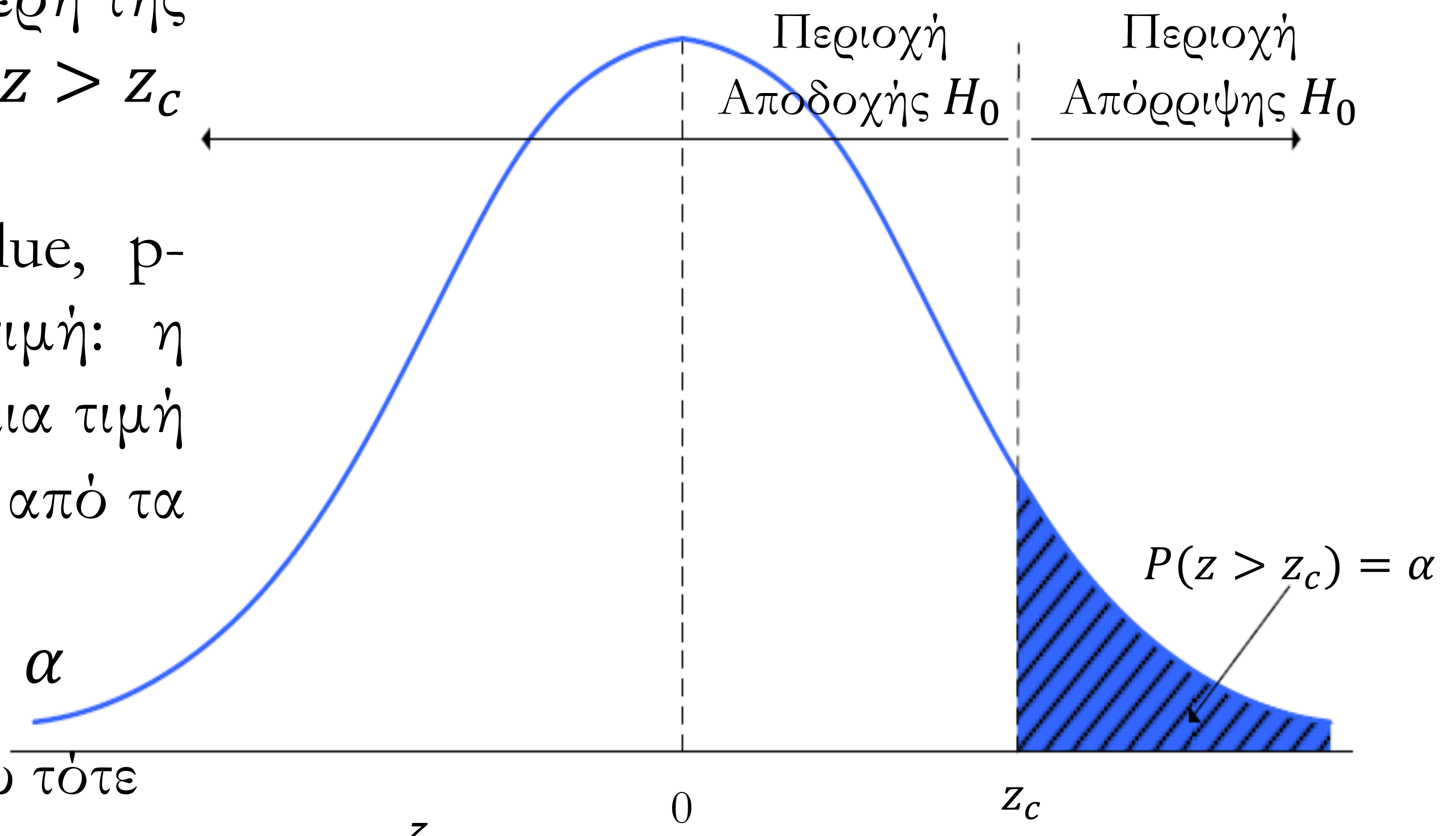
Σφάλμα τύπου I vs. Σφάλμα τύπου II

- Ιδανικά θα θέλαμε να διατηρούμε αυτά τα δύο σφάλματα όσο το δυνατό μικρότερα
  - όμως αν ↓ Σφάλμα τύπου I, το Σφάλμα τύπου II ↑ ή αντίστροφα
- Κλασικό έλεγχο υποθέσεων: θέτουμε τη μέγιστη πιθανότητα του σφάλματος τύπου I σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητάς που είναι γενικά αποδεκτό και προσπαθούμε να επιλέξουμε το στατιστικό κριτήριο που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος τύπου II
  - $\alpha = 1\%$, $\alpha = 5\%$ ή $\alpha = 10\%$
- Γενική αρχή του δικαίου: είναι προτιμότερο να μην καταδικάσουμε έναν αθώο παρά να αθωώσουμε έναν ένοχο

Μονόπλευρος έλεγχος προς τα δεξιά

$$H_0: \beta_1 \leq \beta_1^0 \text{ ή } \beta_1 = \beta_1^0$$
$$H_1: \beta_1 > \beta_1^0$$

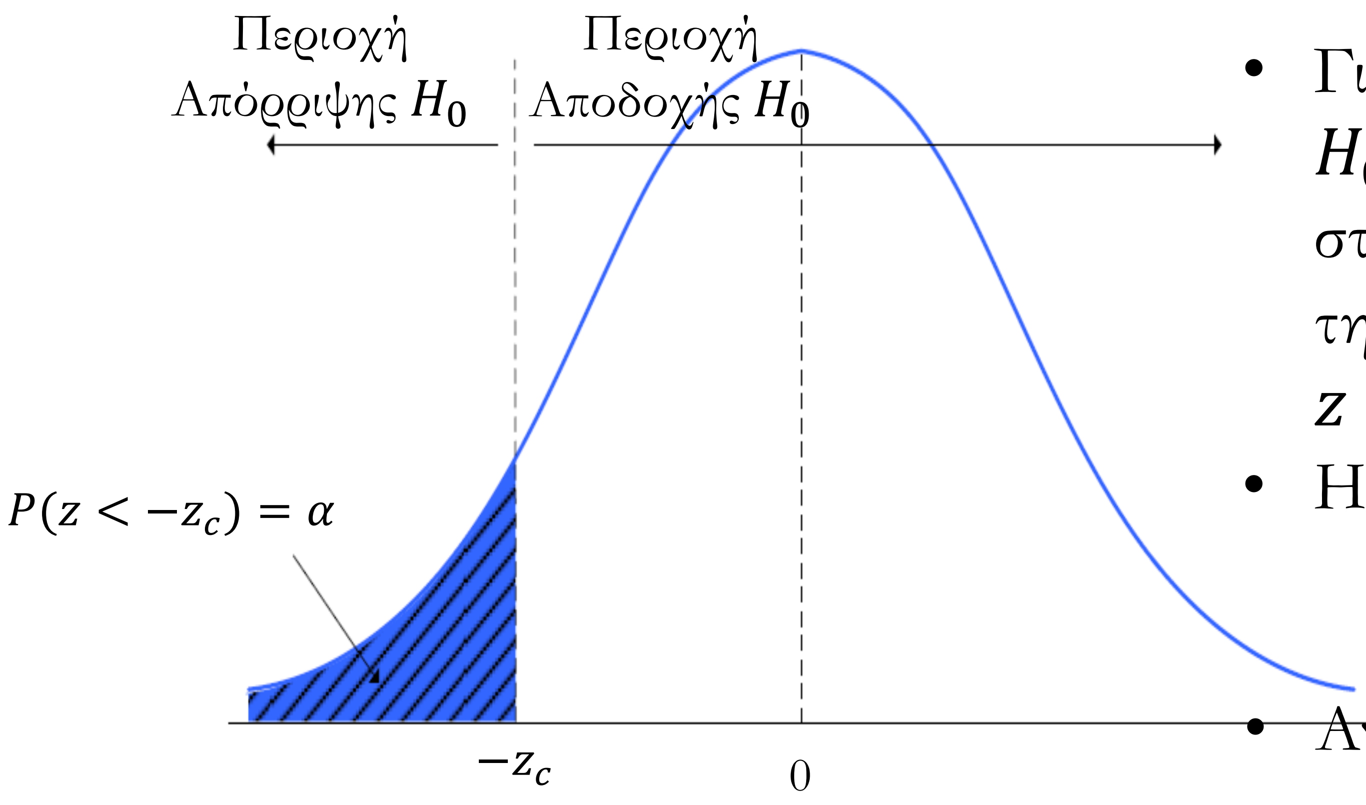
- Για κάποιο επίπεδο σημαντικότητας α η H_0 απορρίπτεται όταν η τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της κατανομής του, $z > z_c$ ή $t > t_c$
- Τιμή πιθανότητας (probability value, p-value) στατιστικού κριτηρίου, p-τιμή: η πιθανότητα το κριτήριο να παίρνει μια τιμή μεγαλύτερη από αυτή που εκτιμάται από τα δεδομένα του δείγματος
- Η H_0 απορρίπτεται αν $\mathrm{p-value} < \alpha$
- Αν ζ η τιμή του στατιστικού κριτηρίου τότε



$$\text{p−τιμή}=\mathrm{P}(z \geq \zeta)=1-\mathrm{P}(z \leq \zeta) = 1 - \Phi(\zeta) = 1 - \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} dz$$

Μονόπλευρος έλεγχος προς τα αριστερά

$H_0: \beta_1 \geq \beta_1^0$ ή $\beta_1 = \beta_1^0$
$H_1: \beta_1 < \beta_1^0$



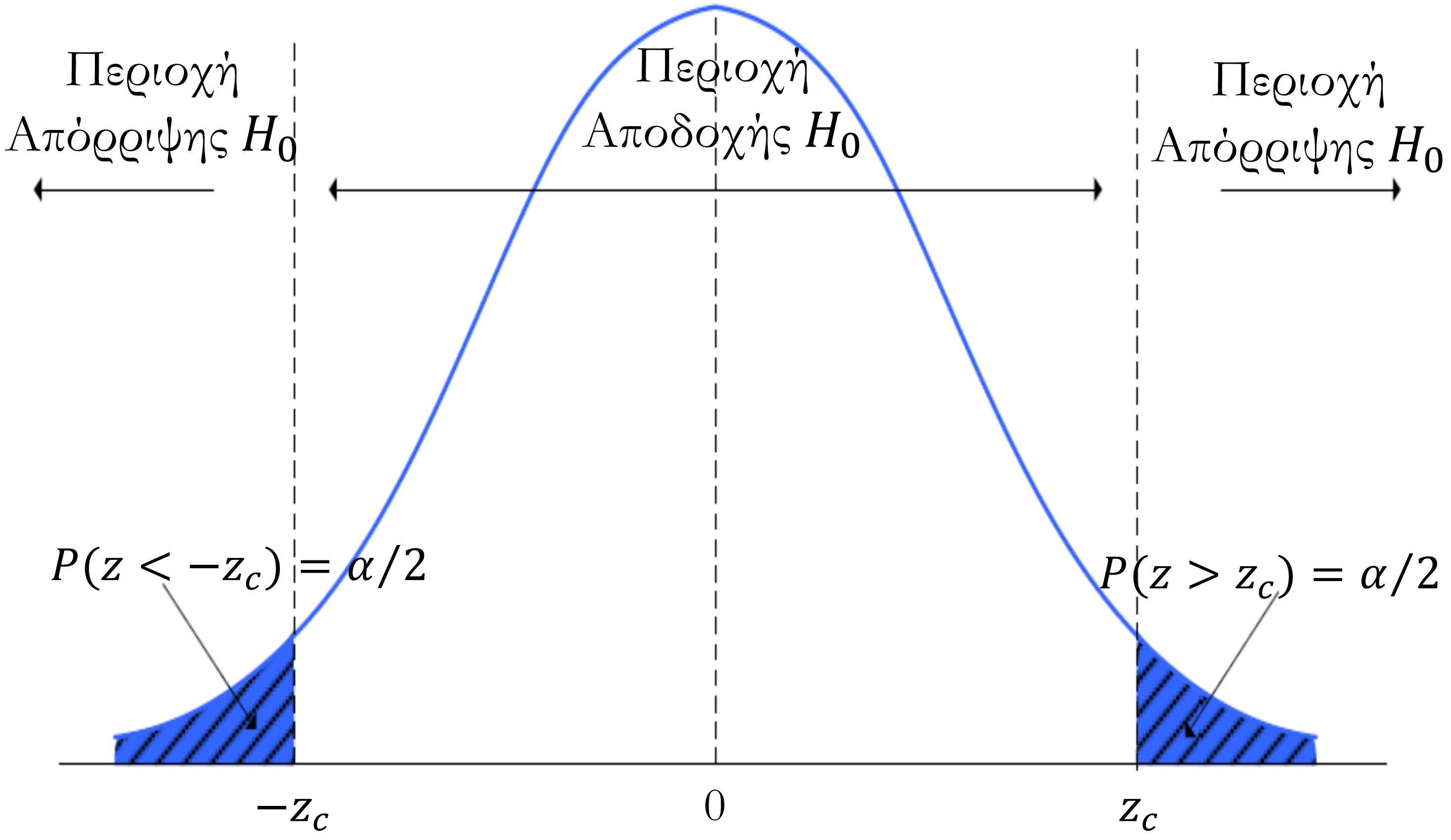
- Για κάποιο επίπεδο σημαντικότητας α η H_0 απορρίπτεται όταν η τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι μικρότερη της κριτικής τιμής της κατανομής του, $z < -z_c$ ή $\mathrm{t} < -t_c$
- Η H_0 απορρίπτεται αν $\mathrm{p-value} < \alpha$
- Αν ζ η τιμή του στατιστικού κριτηρίου τότε

$$\text{p−τιμή=P(z} \leq \zeta) = \Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} dz$$

Δίπλευρος έλεγχος

$$\boxed{\begin{aligned} H_0&: \beta_1 = \beta_1^0 \\ H_1&: \beta_1 \neq \beta_1^0 \end{aligned}}$$

- Η απόρριψη της H_0 μπορεί να γίνει είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά της κατανομής του κριτηρίου
- Η H_0 απορρίπτεται όταν η απόλυτη τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι μεγαλύτερη ή ίση της κριτικής τιμής της κατανομής του, $|z| > z_c$ ή $|t| > t_c$
- Η H_0 απορρίπτεται αν $\mathrm{p-value} < \alpha$
- Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας, $\beta_1^0 = 0$



$$\text{p−τιμή} = \mathrm{P}(z \leq -\zeta) + \mathrm{P}(z \geq \zeta) = 2\mathrm{P}(z \leq -\zeta) = \int_{-\infty}^{-\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} dz$$

Περίληψη

- ✓Τυπικό σφάλμα του εκτιμητή
- ✓Διάστημα εμπιστοσύνης
  - Γνωστή vs. Άγνωστη διακύμανση διαταρακτικού όρου
- ✓Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων
  - z (μεγάλα δείγματα) και t (μικρά δείγματα)
  - Μονόπλευρος προς τα δεξιά/αριστερά έλεγχος
  - Δίπλευρος έλεγχος

Βιβλιογραφία

- ✓ Τζαβαλής, κεφ. 4 & 5
- ✓ Stock & Watson, κεφ. 5.2
- ✓ Gujarati & Porter, κεφ. 4 & 5

Ευχαριστώ!

Ερωτήσεις?