Εισαγωγή στην Οικονομετρία

Άγγελος Αλεξόπουλος
angelos@aueb.gr
ΚΩΔ: *PROPTYXIAKA*1404

Διάλεξη 2

Εαρινό Εξάμηνο 2024

Επανάληψη σε βασικές έννοιες Πιθανοτήτων

Βασικοί ορισμοί

Τυχαίο Πείραμα: Κάθε διαδικασία που μπορεί να επαναληφθεί απείρως πολλές φορές και το αποτέλεσμα κάθε επανάληψης είναι τυχαίο.
Παραδείγματα: Ρίψη νομίσματος, Πίεση που χρειάζεται (σε *psi*) για να σπάσει μια μεταλική μπάρα.

Δειγματικός Χώρος, S: το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος, μπορεί να είναι είτε μετρήσιμο είτε μη μετρήσιμο.
Παραδείγματα: $S = \{\text{Κ},\text{Γ}\}$, $S = [0, \infty]$.

Γεγονός: $s \in S$, κάθε συλλογή πιθανών αποτελεσμάτων του S, αλλιώς: κάθε υποσύνολο του S.
Παραδείγματα: $s = \{\text{Κ}\}$, $s = [0, 3]$.

Παραδείγματα

- **Παράδειγμα 1**: Ρίψη δίκαιου ζαριού. Καθορίστε το δειγματικό χωρο του πειράματος και τα γεγονός:
  $s1 =$‘το αποτέλεσμα είναι μονός αριθμός.’
  Απάντηση: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $s = \{1, 3, 5\}$
- **Παράδειγμα 2**: Ρίψη δίκαιου νομίσματος 3 φορές. Καθορίστε το δειγματικό χωρο του πειράματος και το γεγονότα:
  $s1 =$‘έρχεται ακριβώς μια Κ.’
  $s2 =$‘έρχεται τουλάχιστον μια Κ.’
  $s3 =$‘έρχεται το πολύ μια Κ.’

Βασικές Ιδιότητες Συνόλων

$$
\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \\
A = B &\Leftrightarrow A \subset B \text{ and } B \subset A \\
A \cup B &= \{x \in S : x \in A \text{ or } x \in B\} \\
A \cap B &= \{x \in S : x \in A \text{ and } x \in B\} \\
A^c &= \{x \in S : x \notin A\}
\end{aligned}
$$

Βασικές Ιδιότητες Συνόλων

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

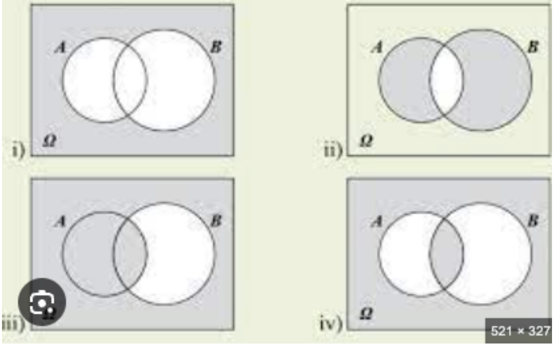
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

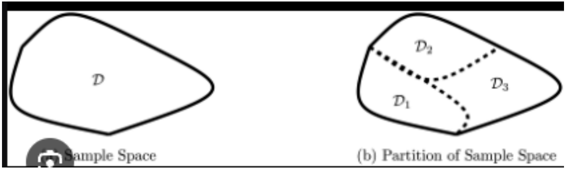
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Βασικές Ιδιότητες Συνόλων -Ορισμοί

- **Ξένα Ενδεχόμενα**: Δυο ενδεχόμενα Α και Β καλούνται ξένα εάν $A \cap B =$
- **Ανά δύο ξένα Ενδεχόμενα**: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ καλούνται ξένα ανά 2 εάν $A_i \cap A_j =$, για κάθε i, j.
- **Διαμέριση**: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ καλούνται διαμέριση του Σ εάν είναι ανά 2 ξένα και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$

Παραδείγματα





Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (*Kolmogorov*)

Πιθανότητα είναι μια συνάρτηση $P(\cdot)$ που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο (δειγματικός χώρος) S και ικανοποιεί τα αξιώματα του (*Kolmogorov*)

1. $P(A) \geq 0$, για κάθε $A \in S$
2. $P(S) = 1$
3. Εάν Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά 2 τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$

Παράδειγμα: Πείτε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε συνάρτηση πιθανότητας:
(α)Ρίψη νομίσματος: $P(K) = P(\Gamma) = 0.5$.
(β)Ρίψη ζαριού: P(αποτέλεσμα i) $= \frac{i}{i+1}$, $i = 1, \ldots, 6$

Λογισμός Πιαθνοτήτων

$$
\begin{aligned}
P(\emptyset) &= 0 \\
P(A) &\leq 1 \\
P(A^c) &= 1 - P(A) \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\
&\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\quad + P(A \cap B \cap C) \\
P(B \cap A^c) &= P(B) - P(A \cap B) \\
A \subset B &\Rightarrow P(A) \leq P(B)
\end{aligned}
$$

Λογισμός Πιαθνοτήτων

- Ανισότητα *Boole*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- Ανισότητα *Bonferroni*

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Εάν A και B είναι ενδεχόμενα του S και $P(B) > 0$ τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A δοθέντος ότι έχει συμβεί το B δίνεται από τον τύπο

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ιδιότητες

- $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$
- $P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$
- Εάν $A_1, A_2, \ldots$ είναι διαμέριση του S τότε

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

Ανεξαρτησία

- Τα ενδεχόμενα A και B καλούνται ανεξάρτητα αν και μονό αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Εάν A και B ανεξάρτηα ενδεχόμενα τότε $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$