Άσκηση 1: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα με δύο υπηρέτες σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα άδειο πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από οποιονδήποτε από τους δύο υπηρέτες με ίση πιθανότητα. Ένας πελάτης που βρίσκει έναν άλλον πελάτη στο σύστημα πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από τον ελεύθερο υπηρέτη. Ένας πελάτης που βρίσκει δύο άλλους πελάτες στο σύστημα περιμένει μέχρι να απελευθερωθεί ένας υπηρέτης. Ένας πελάτης που βρίσκει τρεις άλλους πελάτες στο σύστημα δεν μπαίνει στο σύστημα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ. Μόλις ένας πελάτης ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του, αποχωρεί από το σύστημα.

(a) Ορίσατε τις καταστάσεις.
(b) Βρείτε τις οριακές πιθανότητες.
(c) Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης βρίσκει δύο άλλους πελάτες στο σύστημα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος που δαπανά στο σύστημα;
(d) Ποιο είναι το ποσοστό των πελατών που μπαίνουν στο σύστημα;
(e) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης, ο οποίος μπαίνει στο σύστημα, δαπανά στο σύστημα;

Άσκηση 2: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης μ' έναν υπηρέτη σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Ο κάθε πελάτης έχει μία τιμή. Οι διαδοχικές τιμές των πελατών είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη που έχει τιμή x είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $3+4x$ και διασπορά 5.

(a) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης δαπανά στο σύστημα;
(b) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης με τιμή x δαπανά στο σύστημα;

Άσκηση 3: Θεωρούμε ένα δίκτυο με τρεις σταθμούς. Οι πελάτες φθάνουν στους σταθμούς 1, 2, 3 σύμφωνα με ανελίξεις Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς 5, 10, 15. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους τρεις σταθμούς είναι εκθετικοί με αντίστοιχους ρυθμούς 10, 50, 100. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 1, πηγαίνει (a) στον σταθμό 2, (b) στον σταθμό 3, (c) φεύγει από το σύστημα με ίσες πιθανότητες. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 2, πάντα πηγαίνει στον σταθμό 3. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 3, πηγαίνει στον σταθμό 2 ή φεύγει από το σύστημα με ίση πιθανότητα.

(i) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;
(ii) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης δαπανά στο σύστημα;

Άσκηση 4: Έστω μία ουρά M/M/1 με την εξής τροποποίηση: όταν η εξυπηρέτηση του πελάτη ολοκληρωθεί, ο πελάτης αποχωρεί με πιθανότητα α. Με πιθανότητα $1-\alpha$ ο πελάτης, αντί να αποχωρήσει, ξαναπηγαίνει στο τέλος της ουράς. Επομένως ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί γιά περισσότερες από μία φορά.

(a) Ποιες είναι οι εξισώσεις ισορροπίας γιά τις οριακές πιθανότητες. Αναφέρατε τις συνθήκες υπάρξεώς τους.
(b) Βρείτε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη από την στιγμή της άφιξής του μέχρι ν' αρχίσει η εξυπηρέτησή του γιά πρώτη φορά.
(c) Ποια είναι η πιθανότητα να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης ακριβώς n φορές;
(d) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη;

Άσκηση 5: Σε μία ουρά με απεριόριστη χωρητικότητα οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό μ. Όμως ο υπηρέτης περιμένει μέχρις ότου έρθουν K πελάτες για να αρχίσει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Μετά εξυπηρετεί έναν-έναν τους πελάτες μέχρι ότου οι K πελάτες και όλοι που έρχονται μετά απ' αυτούς εξυπηρετηθούν. Ο υπηρέτης γίνεται τότε "ανενεργός" μέχρι ότου συμβούν K νέες αφίξεις.

- Ποιός είναι ο κατάλληλος χώρος καταστάσεων;
- Σχεδιάσατε το διάγραμμα μεταβάσεων.
- Ποιές είναι οι εξισώσεις ισορροπίας;

Άσκηση 6: Αφίξεις Poisson (με ρυθμό λ) ενώνονται σε μία ουρά μπροστά από δύο παράλληλους υπηρέτες που έχουν ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_A και μ_B, αντίστοιχα. Όταν το σύστημα είναι άδειο οι πελάτες πηγαίνουν στον υπηρέτη A με πιθανότητα α και στον B με πιθανότητα $1-\alpha$. Διαφορετικά ο πρώτος πελάτης της ουράς πηγαίνει στον πρώτο ελεύθερο υπηρέτη.

Ορίσατε τον χώρο καταστάσεων και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας.

(a) Ορίσατε τον χώρο καταστάσεων και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας.
(b) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;
(c) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός των ανενεργών υπηρετών;

Άσκηση 7: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα με δύο υπηρέτες σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda=5$. Ένας πελάτης που βρίσκει τον υπηρέτη 1 ελεύθερο πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από αυτόν τον υπηρέτη. Αν βρει τον υπηρέτη 1 απασχολημένο και τον υπηρέτη 2 ελεύθερο, πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη 2. Αν ένας πελάτης βρει και τους δύο υπηρέτες απασχολημένους, τότε αποχωρεί. Μόλις ένας πελάτης εξυπηρετηθεί από κάποιον υπηρέτη, αποχωρεί από το σύστημα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης από τον υπηρέτη i είναι εκθετικοί με ρυθμούς μ_i, $i=1,2$, όπου $\mu_1=4$, $\mu_2=2$.

(a) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης, ο οποίος μπαίνει στο σύστημα, δαπανά μέσα στο σύστημα;
(b) Ποιό είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο ο υπηρέτης 2 είναι απασχολημένος;

Λύσεις.

(1)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \end{tikzcd}$$

(a) $\{0,1,2,3\}$

(b)
$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu)P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$
$$(\lambda+2\mu)P_2 = \lambda P_1 + 2\mu P_3$$
$$2\mu P_3 = \lambda P_2$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 \qquad P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0 \qquad P_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3}P_0$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right]^{-1}$$

(c) $E(\text{χρόνος}) = E(\text{χρόνος στην ουρά}) + E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης}) = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu}$.

(d) $1 - P_3$

(e) $W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3P_3}{\lambda\cdot(1-P_3)}$

---

(2) Έστω: S : χρόνος εξυπηρέτησης.
U : τιμή πελάτη.
$U \sim$ Ομοιόμορφη$(0,1)$.

$$E(S|U) = 3+4U \qquad Var(S|U) = 5$$

Άρα
$$E(S) = E\{E[S|U]\} = 3 + 4E(U) = 3 + 4\tfrac{1}{2} = 5$$
$$Var(S) = E[Var(S|U)] + Var(E(S|U)) = 5 + 16\cdot Var(U) = \frac{19}{3}$$

Άρα: $E(S^2) = Var(S) + [E(S)]^2 = \frac{94}{3}$.

(a) Pollaczek-Khintchine.
$$W = W_Q + ES = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\lambda E(S))} + ES = \frac{\lambda\cdot 94/3}{2\cdot(1-5\lambda)} + 5.$$

(b) $W_Q + E[S|U=x] = \frac{94\lambda/3}{2(1-5\lambda)} + 3 + 4x$

---

(3). Έστω $\lambda_j;\ j=1,2,3$: συνολικός ρυθμός άφιξης προς τον σταθμό j.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 = 15 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = \dots \\ \lambda_3 = \dots \end{array}$$

(i) $L = \sum_i \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} = \frac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2-\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3-\lambda_3}$

(ii) $W = \frac{L}{\sum r_j} = \frac{L}{30}$.

---

(4) (a)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\alpha\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\alpha\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\alpha\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\lambda P_0 = \alpha\mu P_1$$
$$(\lambda+\alpha\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \alpha\mu P_{n+1}\ ;\ n\geq 1.$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\alpha\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\alpha\mu}\right);\ n\geq 0.$$
condition: $\lambda < \alpha\mu$

(b) $E(T) = \sum_n E(T|n \text{ present})P_n = \sum_n \frac{n}{\mu}P_n = \frac{L}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{\alpha\mu-\lambda}$

(c) $P\{\text{enter service exactly } n \text{ times}\} = (1-\alpha)^{n-1}\cdot\alpha$

(d) $EN\cdot\frac{1}{\mu} = \cancel{\alpha}/\mu\cdot\frac{1}{\alpha}$

$$EN = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1}\alpha = \alpha\frac{1}{[1-(1-\alpha)]^2} = \frac{1}{\alpha}$$

Λύση της Άσκησεως 5:

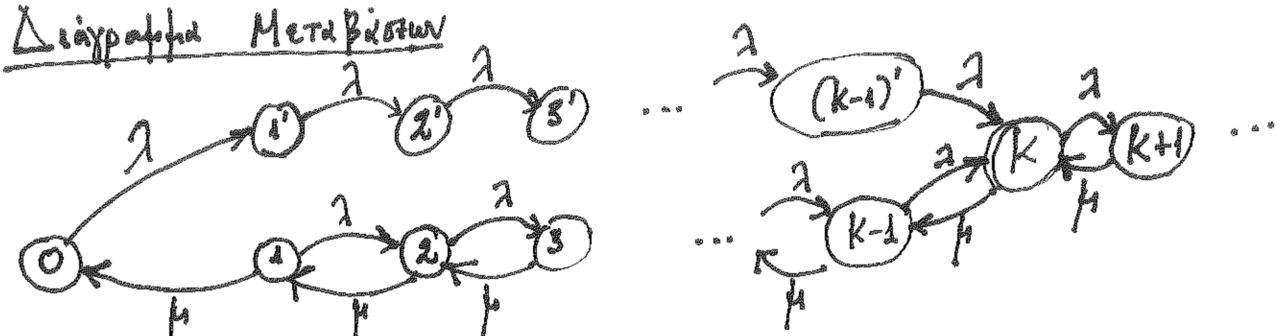
- Ο **χώρος καταστάσεων** αποτελείται από τις εξής καταστάσεις:

κατάσταση 0 : Το σύστημα είναι άδειο

κατάσταση $n \geq 1$: Υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και ο υπηρέτης είναι ενεργός

κατάσταση n', $(n \geq 1)$: Υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και ο υπηρέτης είναι ανενεργός.

- **Διάγραμμα Μεταβάσεων**



- Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\text{rate out} = \text{rate in}$$

κατάσταση 0: $\lambda \cdot P_0 = \mu P_1$

κατάσταση 1: $(\lambda+\mu) \cdot P_1 = \mu P_2$

κατάσταση $n = 2, \ldots, k-1$: $(\lambda+\mu) \cdot P_n = \lambda P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1}$

κατάσταση k: $(\lambda+\mu) P_k = \lambda P_{(k-1)'} + \lambda \cdot P_{k-1} + \mu P_{k+1}$

κατάσταση $n' \, (n=1, \ldots, k-1)$: $\lambda P_{n'} = \lambda P_{(n-1)'}$

κατάσταση $n = k+1, k+2, \ldots$: $(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$, $n > k$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

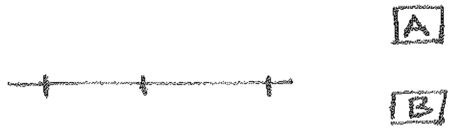
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Άσκηση 6. Αφίξεις Poisson (με ρυθμό $\lambda>0$) ενώνονται σε μία ουρά μπροστά από δύο παράλληλους υπηρέτες που έχουν ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_A και μ_B, αντίστοιχα. Όταν το σύστημα είναι άδειο οι πελάτες πηγαίνουν στον υπηρέτη A με πιθανότητα α και στον υπηρέτη B με πιθανότητα $1-\alpha$. Διαφορετικά ο πρώτος πελάτης της ουράς πηγαίνει στον πρώτο ελεύθερο υπηρέτη.



(a) Ορίσατε τον χώρο καταστάσεων και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας.
(b) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;
(c) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός των ανενεργών υπηρετών;

Απάντηση:

(a) Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο: $\{0, A, B, 2, 3, \dots\}$, όπου

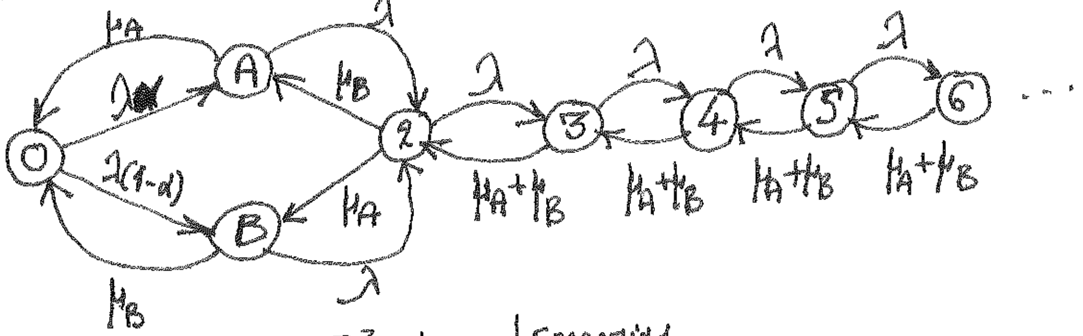
κατάσταση 0 σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα.

κατάσταση A σημαίνει ότι υπάρχει ένας πελάτης στο σύστημα και εξυπηρετείται από τον υπηρέτη A

κατάσταση B σημαίνει ότι υπάρχει ένας πελάτης στο σύστημα και εξυπηρετείται από τον υπηρέτη B.

κατάσταση $i\geq 2$ σημαίνει ότι υπάρχουν $i\geq 2$ πελάτες στο σύστημα.

Διάγραμμα μεταβάσεων:



Εξισώσεις Ισορροπίας

κατάσταση 0: $\lambda\alpha P_0 + \lambda(1-\alpha)P_0 = \mu_A P_A + \mu_B P_B$

κατάσταση A: $(\lambda+\mu_A)P_A = \alpha\lambda P_0 + \mu_B P_2$

κατάσταση B: $(\lambda+\mu_B)P_B = \lambda(1-\alpha)P_0 + \mu_A P_2$

κατάσταση $n\geq 2$: $(\lambda+\mu_A+\mu_B)P_n = \lambda P_{n-1} + (\mu_A+\mu_B)P_{n+1}$, $n\geq 2$, (όπου $P_1 = P_A + P_B$)

(b) Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα: $L = P_A + P_B + \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot P_n$

(c) Μέσος αριθμός ανενεργών πελατών $= 2P_0 + P_A + P_B$

Άσκηση 7. Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα με δύο υπηρέτες σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda=5$. Ένας πελάτης που βρίσκει τον υπηρέτη 1 ελεύθερο, πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από αυτόν τον υπηρέτη. Αν βρεί τον υπηρέτη 1 απασχολημένο και τον υπηρέτη 2 ελεύθερο, πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη 2. Αν ένας πελάτης βρει και τους δύο υπηρέτες απασχολημένους, τότε αποχωρεί. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης από τον υπηρέτη i είναι εκθετικοί με ρυθμούς μ_i, $i=1,2$, όπου $\mu_1=4, \mu_2=2$.

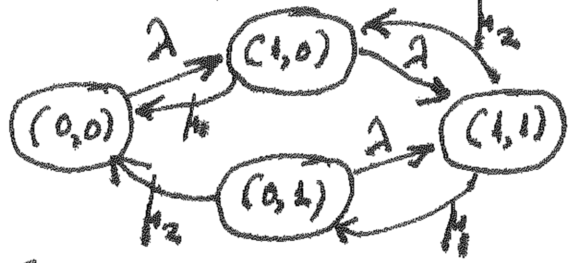
(a) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης, ο οποίος μπαίνει στο σύστημα, δαπανά μέσα στο σύστημα;

(b) Ποιό είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο ο υπηρέτης 2 είναι απασχολημένος;

Απάντηση: Έστω κατάσταση (i,j), όταν i πελάτης είναι στον υπηρέτη 1 και j πελάτης είναι στον υπηρέτη 2.

Ο χώρος καταστάσεων είναι $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι:



Εξισώσεις ισορροπίας

κατάσταση (0,0) : $\lambda P_{(0,0)} = \mu_1 P_{(1,0)} + \mu_2 P_{(0,1)}$

κατάσταση (1,0) : $(\lambda+\mu_1) P_{(1,0)} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{(1,1)}$

κατάσταση (0,1) : $(\lambda+\mu_2) P_{(0,1)} = \mu_1 P_{(1,1)}$

κατάσταση (1,1) : $(\mu_1+\mu_2) P_{(1,1)} = \lambda P_{(0,1)} + \lambda P_{(1,0)}$

$$P_{(0,0)} + P_{(1,0)} + P_{(0,1)} + P_{(1,1)} = 1$$

(a) Από τον τύπο του Little έχουμε ότι $W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{1\cdot(P_{(0,1)}+P_{(1,0)})+2P_{(1,1)}}{\lambda(1-P_{(1,1)})}$

(b) $P_{(0,1)} + P_{(1,1)}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

→ σελ. 21 των σημειώσεων

<u>Άσκηση:</u> Δείξτε ότι στη μη ομογενή ανέλιξη Poisson ισχύει

$$P[X(t+s)-X(t)=n] = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\frac{[m(t+s)-m(t)]^{n}}{n!},\ n\geq 0.$$

<u>Απάντηση:</u> Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $n=0$ η ζητούμενη σχέση έχει αποδειχτεί στη σελ. 21 των σημειώσεων. Έστω ότι ισχύει για $n-1$ (όπου $n\geq 1$). Θα δείξουμε ότι ισχύει για n. Για t σταθερό έχουμε:

$$p_n(s+h) = P[X(t+s+h)-X(t)=n] = p_{n-1}(s)[\lambda(t+s)h+o(h)] + p_n(s)[1-\lambda(t+s)h+o(h)]$$

$$p_n'(s) = p_{n-1}(s)\lambda(t+s) - p_n(s)\lambda(t+s) \qquad (1)$$

Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$p_{n-1}(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\cdot\frac{[m(t+s)-m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την (2) μετά από κάποιες πράξεις διαπιστώνουμε ότι η έκφραση

$$p_n(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\cdot\frac{[m(t+s)-m(t)]^{n}}{n!}$$

επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (1). Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη.

Γ→ σελ. 28 των σημειώσεων

Άσκηση: Δείξτε ότι αν $\lambda=\mu$ τότε: $\phi(z,t)=\left(\dfrac{\mu(z-1)t-z}{\mu(z-1)t-1}\right)^{\xi}$.

Απάντηση: Η μερική διαφορική εξίσωση αν $\lambda=\mu$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t}-\mu(z-1)^2\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z}=0 \qquad (*)$$

Οι βοηθητικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{-\mu(z-1)^2}=\frac{d\phi}{0}$$

$d\phi=0$, δηλαδή $\phi=$ σταθερά.

Αν ολοκληρώσουμε την

$$dt=\frac{dz}{-\mu(z-1)^2}$$

παίρνουμε

$$t=-\frac{1}{\mu}\int(z-1)^{-2}dz=-\frac{1}{\mu}\frac{(z-1)^{-2+1}}{-2+1}+C$$

άρα: $$t-\frac{1}{\mu(z-1)}=C$$

Συνεπώς η γενική λύση της $(*)$ έχει την εξής μορφή:

$$\phi(z,t)=f\left(t-\frac{1}{\mu(z-1)}\right)$$

Η f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη στο $t=0$. Δηλαδή τη συνθήκη:

$$\phi(z,0)=f\left(+\frac{1}{\mu(1-z)}\right)=z^{\xi}$$

Θέτοντας $u=\dfrac{1}{\mu(1-z)}$ διαπιστώνουμε ότι: $z=\dfrac{\mu u-1}{\mu u}=1-\dfrac{1}{\mu u}$

Άρα: $$f(u)=\left(1-\frac{1}{\mu u}\right)^{\xi}.$$

Οπότε:

$$\phi(z,t)=\left(1-\frac{1}{\mu\left[t-\frac{1}{\mu(z-1)}\right]}\right)^{\xi}=\left(\frac{\mu(z-1)t-z}{\mu(z-1)t-1}\right)^{\xi} \qquad \square$$