Ch. 6

Martingales σε διακριτό χρόνο (βλέπε S.M.Ross(1996), Stochastic Processes)

Θα παρουσιάσουμε ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας, που είναι γνωστή ως martingale. Ο ορισμός της martingale προτυποποιεί την έννοια του δίκαιου παιχνιδιού.

Θα ορίσουμε την martingale σε διακριτό χρόνο. Έχουμε δει martingales σε συνεχή χρόνο, όταν παρουσιάσαμε τον τύπο Black-Scholes.

Ορισμός: Η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n, n \geq 1\}$ ονομάζεται διαδικασία martingale αν

$$E[|Z_n|] < \infty \quad \text{για όλα τα } n = 1, 2, \dots$$

και

$$E[Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = Z_n \tag{1}$$

Μια martingale είναι μια γενικευμένη εκδοχή του δίκαιου παιχνιδιού. Αυτό οφείλεται στο ότι, αν ερμηνεύσουμε την Z_n ως την περιουσία του παίκτη μετά το n-οστό παιχνίδι, τότε η (1) δηλώνει ότι η αναμενόμενη περιουσία του μετά το $n+1$ παιχνίδι ισούται με την περιουσία του μετά το n-οστό παιχνίδι χωρίς επιρροή από αυτά που συνέβησαν προηγουμένως.

Παίρνοντας μέσες τιμές στην (1), έχουμε

$$E[Z_{n+1}] = E[Z_n]$$

και συνεπώς

$$E[Z_n] = E[Z_1] \quad \text{για όλα τα } n = 1, 2, \dots$$

Παραδείγματα Martingales

Παράδειγμα 1

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0.

Έστω $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Τότε η στοχαστική διαδικασία Z_n, $n = 1, 2, \dots$ είναι martingale διότι:

$$
\begin{aligned}
E[Z_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] &= E[Z_n + X_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] \\
&= E[Z_n | Z_1, \dots, Z_n] + E[X_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] \\
&= Z_n + E[X_{n+1}] \\
&= Z_n
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2

Αν $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $E(X_i)=1$, τότε η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n, n=1,2,\ldots\}$ είναι martingale, όπου

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

Αυτό εξηγείται ως εξής:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid Z_1, \ldots, Z_n] &= E[Z_n X_{n+1} \mid Z_1, \ldots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1} \mid Z_1, \ldots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1}] \\ &= Z_n \end{aligned}$$

ΧΡΟΝΟΙ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ (STOPPING TIMES)

Ορισμός: Η τυχαία μεταβλητή N, η οποία παίρνει θετικές ακέραιες τιμές (πιθανώς και το άπειρο) ονομάζεται τυχαίος χρόνος (random time) για την στοχαστική διαδικασία $\{Z_n, n=1,2,\ldots\}$ αν το γεγονός $\{N=n\}$ προσδιορίζεται από τις τ.μ. $Z_1, \ldots, Z_n$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν γνωρίζουμε τις $Z_1, \ldots, Z_n$ μπορούμε να διαπιστώσουμε αν $N=n$ ή αν $N \neq n$.

Αν $P(N<\infty)=1$, τότε ο τυχαίος χρόνος N ονομάζεται χρόνος τερματισμού (stopping time)

Έστω N τυχαίος χρόνος για την διαδικασία $Z_n, n=1,2,\ldots$ και έστω

$$\bar{Z}_n = \begin{cases} Z_n & \text{αν } n \leq N \\ Z_N & \text{αν } n > N \end{cases}$$

Η διαδικασία $\bar{Z}_n, n \geq 1$ ονομάζεται σταματημένη (stopped) διαδικασία

Θεώρημα (Το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale)
Martingale Stopping Theorem

Έστω $Z_n, n=1,2,\ldots$ martingale και N τυχαίος χρόνος για την $Z_n, n=1,2,\ldots$ Αν ένα από τα παρακάτω ισχύει

(i) Η Z_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη ή

(ii) Η N είναι φραγμένη ή

(iii) $E[N]<\infty$, και υπάρχει κάποιο $M<\infty$ τέτοιο ώστε

$$E\left[\,|Z_{n+1}-Z_n|\,\middle|\,Z_1,\ldots,Z_n\right]<M$$

τότε:

$$E[Z_N]=E[Z_1]$$

Το παραπάνω Θεώρημα δηλώνει ότι σ' ένα δίκαιο παιχνίδι, αν ο παίκτης χρησιμοποιεί έναν χρόνο τερματισμού για να αποφασίσει πότε να εγκαταλείψει το παιχνίδι, τότε η αναμενόμενη τελική του περιουσία ισούται με την αναμενόμενη αρχική του περιουσία. Συνεπώς, (με την έννοια της αναμενόμενης τιμής) κανένα πετυχημένο στοιχηματικό σύστημα δεν υπάρχει αν μια από τις υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος ισχύει.

Πόρισμα (Εξίσωση του Wald - Wald's Equation)

Αν οι τ.μ. X_i, $i=1,2,\ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $E[|X_i|]<\infty$ και αν η τ.μ. N είναι χρόνος τερματισμού για την διαδικασία $X_1, X_2, \ldots$ με $E(N)<\infty$, τότε

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$$

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $\mu = E[X_i]$.

Αφού η διαδικασία

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

είναι martingale (βλέπε παράδειγμα 1), αν υποθέσουμε ότι το πιο πάνω θεώρημα είναι εφαρμόσιμο, έχουμε ότι

$$E[Z_N] = E[Z_1] = 0$$

Όμως,
$$E[Z_N] = E\left[\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)\right]$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu\right]$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] - E[N]\mu$$

Για να δείξουμε ότι το πιο πάνω θεώρημα είναι εφαρμόσιμο, επαληθεύουμε την Συνθήκη (iii).

Βλέπουμε ότι $\quad Z_{n+1} - Z_n = X_{n+1} - \mu$

και συνεπώς

$$E[|Z_{n+1} - Z_n| \,|\, Z_1, \dots, Z_n] = E[|X_{n+1} - \mu| \,|\, Z_1, \dots, Z_n]$$
$$= E[|X_{n+1} - \mu|]$$
$$\leq E[|X|] + |\mu|$$

Στο πιο κάτω παράδειγμα θα δούμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale για να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την εμφάνιση μιάς συγκεκριμένης διάταξης.

Παράδειγμα (Υπολογισμός του αναμενόμενου χρόνου μέχρι την εμφάνιση μιάς διάταξης)

Θεωρούμε οτι μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων διακριτών τ.μ. παρατηρείται διαδοχικά, μία κάθε μέρα. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός που πρέπει να παρατηρηθεί έως ότου εμφανιστεί μία συγκεκριμένη ακολουθία? Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι 0, 1, 2 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ και επιθυμούμε να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να εμφανιστεί η ροή 020.

Για παράδειγμα, αν η ακολουθία των αποτελεσμάτων είναι
2, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0 τότε ο ζητούμενος αριθμός N είναι 12.

Για να υπολογίσουμε το $E[N]$ ας θεωρήσουμε μία ακολουθία παικτών, ο καθένας απο τους οποίους αρχικά έχουν μία χρηματική μονάδα, που παίζουν σ' ένα δίκαιο καζίνο. Ο παίκτης i ξεκινά να στοιχηματίζει στην αρχή της μέρας i και στοιχηματίζει μία μονάδα ότι η τιμή σε αυτην την ημέρα θα είναι ίση με 0. Αν κερδίσει (οπότε θα έχει 2 χρηματικές μονάδες) θα στοιχηματίσει τις 2 μονάδες στο ότι το επόμενο αποτέλεσμα θα είναι 2, και αν κερδίσει αυτό το στοίχημα (οπότε θα έχει 12 χρηματικές μονάδες), τότε θα στοιχηματίσει όλες τις 12 χρηματικές μονάδες στο ότι το επόμενο αποτέλεσμα είναι 0. Συνεπώς ο κάθε παίκτης θα χάσει μία χρηματική μονάδα αν αποτύχει σε κάποιο από τα στοιχήματά του και θα κερδίσει 23 χρηματικές μονάδες αν κερδίσει και στα τρία στοιχήματά του. Στην αρχή κάθε μέρας κάποιος άλλος παίκτης ξεκινά να στοιχηματίζει.

Αν συμβολίσουμε με X_n τα συνολικά κέρδη του καζίνο μετά την n-οστή μέρα, τότε αφού όλα τα στοιχήματα είναι δίκαια, έπεται ότι η διαδικασία $X_n, n=1,2,\ldots$ είναι martingale με μέση τιμή 0

Έστω N ο χρόνος μέχρι να εμφανιστεί η ακολουθία 0 2 0.
Στο τέλος της N-οστής ημέρας κάθε παίκτης $1, \ldots, N-3$ θα έχει χάσει 1 χρηματική μονάδα, ο παίκτης $N-2$ θα έχει κερδίσει 23 χρηματικές μονάδες, ο παίκτης $N-1$ θα έχει χάσει 1 χρηματική μονάδα και ο παίκτης N θα έχει κερδίσει 1 χρηματική μονάδα (αφού το αποτέλεσμα της N-οστής ημέρας είναι 0). Συνεπώς

$$X_N = N-3-23+1-1 = N-26$$

και αφού $E[X_N] = 0$ (λόγω του θεωρήματος Τερματισμού της martingale)

βλέπουμε ότι

$$E(N-26) = 0 \Rightarrow E(N) = 26$$