Ασκήσεις για κίνηση Brown & Martingales

Στις ακόλουθες ασκήσεις η στοχαστική διαδικασία $B(t), t \geq 0$ είναι μια τυπική κίνηση Brown και T_a συμβολίζει τον χρόνο που η διαδικασία επιτυγχάνει (hits) για πρώτη φορά την τιμή a.

1. Ποιά είναι η κατανομή της $B(s) + B(t)$, $s \leq t$

2. Υπολογίστε την δεσμευμένη κατανομή της $B(s)$ δοθέντος ότι $B(t_1) = A$, $B(t_2) = B$, όπου $0 < t_1 < s < t_2$

3. Δείξτε ότι $P(T_a < \infty) = 1$

4. Υπολογίσατε την $P(T_1 < T_{-1} < T_2)$.

5. Υποθέτουμε ότι έχετε μία μετοχή της οποίας η αξία μεταβάλλεται σύμφωνα με μία τυπική κίνηση Brown. Υποθέτουμε ότι είχατε αγοράσει την μετοχή στην τιμή $b+c$, $c>0$, και ότι η παρούσα αξία της είναι b. Έχετε αποφασίσει να πουλήσετε την μετοχή όταν η αξία της φθάσει στο ποσό $b+c$ ή όταν ένα χρονικό διάστημα t περάσει (οποιοδήποτε συμβεί πρώτο). Ποιά είναι η πιθανότητα να μην ανακτήσετε την τιμή αγοράς;

6. Η παρούσα αξία μιάς μετοχής είναι 100. Υποθέτουμε ότι ο λογάριθμος της αξίας της μετοχής μεταβάλλεται σύμφωνα με μία κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης $\mu = 2$ και παράμετρο διακύμανσης $\sigma^2 = 1$. Δώσατε το κόστος Black-Scholes για το δικαίωμα να αγοράσουμε τη μετοχή την χρονική στιγμή 10 με κόστος 100. Υποθέτουμε ότι $\alpha = 0.05$

Παρένθεση:

Μία στοχαστική διαδικασία $\{Y(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία Martingale αν, γιά $s<t$,

$$E[Y(t) \mid Y(u), 0 \leq u \leq s] = Y(s)$$

Μία σημαντική ιδιότητα μιάς διαδικασίας Martingale είναι ότι, αν παρατηρούμε συνεχώς τη διαδικασία και μετά σταματήσουμε σε κάποια χρονική στιγμή T, τότε, υπό την προυπόθεση ότι κάποιες τεχνικές συνθήκες ισχύουν (οι οποίες θα ισχύουν στα προβλήματα που θα θεωρήσουμε),

$$E[Y(T)] = E[Y(0)]$$

Ο χρόνος T συνήθως εξαρτάται από τις τιμές της διαδικασίας και είναι γνωστός ως Χρόνος Τερματισμού της Martingale. Το πιό πάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale.

7. Αν η διαδικασία $\{Y(t), t \geq 0\}$ είναι Martingale, δείξτε ότι $E[Y(t)] = E[Y(0)]$

8. Δείξτε ότι η τυπική κίνηση Brown είναι Martingale

9. Έστω $T = \min\{t : B(t) = 2-4t\}$
Δηλαδή, το T είναι ο χρόνος μέχρι η τυπική κίνηση Brown φθάσει για πρώτη φορά στο $2-4t$. Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale για να βρείτε την $E(T)$

10. Έστω $X(t), t \geq 0$, κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης μ και παράμετρο διακύμανσης σ^2.
Δηλαδή, $X(t) = \sigma B(t) + \mu t$
Έστω $\mu > 0$ και για μία θετική σταθερά x, ορίζουμε

$$T = \min\{t : X(t) = x\} = \min\left\{t : B(t) = \frac{x-\mu t}{\sigma}\right\}$$

Δηλαδή, το T είναι ο χρόνος που η διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ φθάνει στο x για πρώτη φορά. Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Τερματισμού της Martingale για να δείξτε ότι $E(T) = x/\mu$