Άσκηση 1: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα με δύο υπηρέτες σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα άδειο πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από οποιονδήποτε από τους δύο υπηρέτες με ίση πιθανότητα. Ένας πελάτης που βρίσκει έναν άλλον πελάτη στο σύστημα πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από τον ελεύθερο υπηρέτη. Ένας πελάτης που βρίσκει δύο άλλους πελάτη στο σύστημα περιμένει μέχρι να απελευθερωθεί ένας υπηρέτης. Ένας πελάτης που βρίσκει τρείς άλλους πελάτες στο σύστημα δεν μπαίνει στο σύστημα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ. Μόλις ένας πελάτης ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του, αποχωρεί από το σύστημα.

(a) Ορίσατε τις καταστάσεις.
(b) Βρείτε τις οριακές πιθανότητες.
(c) Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης βρίσκει δύο άλλους πελάτη στο σύστημα. Ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος που δαπανά στο σύστημα;
(d) Ποιό είναι το ποσοστό των πελατών που μπαίνουν στο σύστημα;
(e) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης, ο οποίος μπαίνει στο σύστημα, δαπανά στο σύστημα;

Άσκηση 2: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης μ' έναν υπηρέτη σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ. Ο κάθε πελάτης έχει μία τιμή. Οι διαδοχικές τιμές των πελατών είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη που έχει τιμή x είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $3+4x$ και διασπορά 5.

(a) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης δαπανά στο σύστημα;
(b) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης με τιμή x δαπανά στο σύστημα;

Άσκηση 3: Θεωρούμε ένα δίκτυο με τρεις σταθμούς. Οι πελάτες φθάνουν στους σταθμούς 1, 2, 3 σύμφωνα με ανελίξεις Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς 5, 10, 15. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους τρεις σταθμούς είναι εκθετικοί με αντίστοιχους ρυθμούς 10, 50, 100. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 1, πηγαίνει (a) στον σταθμό 2, (b) στον σταθμό 3, (c) φεύγει από το σύστημα με ίσες πιθανότητες. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 2, πάντα πηγαίνει στον σταθμό 3. Ένας πελάτης, ο οποίος συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του στον σταθμό 3, πηγαίνει στον σταθμό 2 ή φεύγει από το σύστημα με ίση πιθανότητα.

(i) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;
(ii) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης δαπανά στο σύστημα;

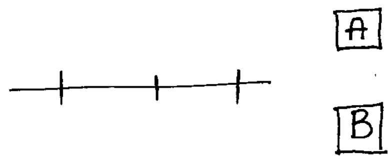
Άσκηση 4: Έστω μία ουρά M/M/1 με την εξής τροποποίηση: όταν η εξυπηρέτηση του πελάτη ολοκληρωθεί, ο πελάτης αποχωρεί με πιθανότητα α. Με πιθανότητα $1-\alpha$ ο πελάτης, αντί να αποχωρήσει, ξαναπηγαίνει στο τέλος της ουράς. Επομένως ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί γιά περισσότερες από μία φορά.

(a) Ποιές είναι οι εξισώσεις ισορροπίας γιά τις οριακές πιθανότητες. Αναφέρατε τις συνθήκες ύπαρξής τους.
(b) Βρείτε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη από την στιγμή της άφιξής του μέχρι ν' αρχίσει η εξυπηρέτησή του γιά πρώτη φορά.
(c) Ποιά είναι η πιθανότητα να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης ακριβώς n φορές;
(d) Ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη;

Άσκηση 5: Σε μία ουρά με απεριόριστη χωρητικότητα οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό μ. Όμως ο υπηρέτης περιμένει μέχρις ότου έρθουν K πελάτες γιά να αρχίσει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Μετά εξυπηρετεί έναν-έναν τους πελάτες μέχρι ότου οι K πελάτες και όλοι που έρχονται μετά απ' αυτούς εξυπηρετηθούν. Ο υπηρέτης γίνεται τότε "ανενεργός" μέχρι ότου συμβούν K νέες αφίξεις.

- Ποιός είναι ο κατάλληλος χώρος καταστάσεων;
- Σχεδιάσατε το διάγραμμα μεταβάσεων.
- Ποιές είναι οι εξισώσεις ισορροπίας;

Άσκηση 6: αφίξεις Poisson (με ρυθμό λ) ενώνονται σε μία ουρά μπροστά από δύο παράλληλους υπηρέτες που έχουν ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_A και μ_B, αντίστοιχα.
Όταν το σύστημα είναι άδειο οι πελάτες πηγαίνουν στον υπηρέτη A με πιθανότητα α και στον B με πιθανότητα $1-\alpha$. Διαφορετικά ο πρώτος πελάτης της ουράς πηγαίνει στον πρώτο ελεύθερο υπηρέτη.



(a) Ορίσατε τον χώρο καταστάσεων και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας.
(b) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα;
(c) Ποιός είναι ο μέσος αριθμός των ανενεργών υπηρετών;

Άσκηση 7: Πελάτες φθάνουν σ' ένα σύστημα με δύο υπηρέτες σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό $\lambda=5$. Ένας πελάτης που βρίσκει τον υπηρέτη 1 ελεύθερο πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από αυτόν τον υπηρέτη. Αν βρεί τον υπηρέτη 1 απασχολημένο και τον υπηρέτη 2 ελεύθερο, πηγαίνει να εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη 2. Αν ένας πελάτης βρεί και τους δύο υπηρέτες απασχολημένους, τότε αποχωρεί. Μόλις ένας πελάτης εξυπηρετηθεί από κάποιον υπηρέτη, αποχωρεί από το σύστημα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης από τον υπηρέτη i είναι εκθετικοί με ρυθμούς μ_i, $i=1,2$, όπου $\mu_1=4$, $\mu_2=2$.

(a) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος που ένας πελάτης, ο οποίος μπαίνει στο σύστημα, δαπανά μέσα στο σύστημα;
(b) Ποιό είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο ο υπηρέτης 2 είναι απασχολημένος;

σελ. 28 των σημειώσεων

Άσκηση: Δείξτε ότι αν $\lambda=\mu$ τότε: $\phi(z,t)=\left(\frac{\mu(z-1)t-z}{\mu(z-1)t-1}\right)^{\xi}$.

Απάντηση: Η μερική διαφορική εξίσωση αν $\lambda=\mu$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial t}-\mu(z-1)^2\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z}=0 \qquad (*)$$

Οι βοηθητικές εξισώσεις είναι:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{-\mu(z-1)^2}=\frac{d\phi}{0}$$

$d\phi=0$, δηλαδή $\phi=$ σταθερά.

Αν ολοκληρώσουμε την

$$dt=\frac{dz}{-\mu(z-1)^2}$$

παίρνουμε

$$t=-\frac{1}{\mu}\int(z-1)^{-2}dz=-\frac{1}{\mu}\frac{(z-1)^{-2+1}}{-2+1}+C$$

άρα:

$$t-\frac{1}{\mu(z-1)}=C$$

Συνεπώς η γενική λύση της $(*)$ έχει την εξής μορφή:

$$\phi(z,t)=f\left(t-\frac{1}{\mu(z-1)}\right)$$

Η f προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη στο $t=0$. Δηλαδή τη συνθήκη:

$$\phi(z,0)=f\left(+\frac{1}{\mu(1-z)}\right)=z^{\xi}$$

Θέτοντας $u=\frac{1}{\mu(1-z)}$ διαπιστώνουμε ότι: $z=\frac{\mu u-1}{\mu u}=1-\frac{1}{\mu u}$

Άρα: $f(u)=\left(1-\frac{1}{\mu u}\right)^{\xi}$.

Οπότε:

$$\phi(z,t)=\left(1-\frac{1}{\mu\left[t-\frac{1}{\mu(z-1)}\right]}\right)^{\xi}=\left(\frac{\mu(z-1)t-z}{\mu(z-1)t-1}\right)^{\xi}$$

$\square$

→ σελ. 21 των σημειώσεων

Άσκηση: Δείξτε ότι στη μη ομογενή ανέλιξη Poisson ισχύει

$$P[X(t+s)-X(t)=n] = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}, \quad n\geq 0.$$

Απάντηση: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $n=0$ η ζητούμενη σχέση έχει αποδειχτεί στη σελ. 21 των σημειώσεων. Έστω ότι ισχύει για $n-1$ (όπου $n\geq 1$). Θα δείξουμε ότι ισχύει για n. Για t σταθερό έχουμε:

$$p_n(s+h) = P[X(t+s+h)-X(t)=n] = p_{n-1}(s)[\lambda(t+s)h+o(h)] + p_n(s)[1-\lambda(t+s)h+o(h)]$$

$$p_n'(s) = p_{n-1}(s)\lambda(t+s) - p_n(s)\lambda(t+s) \qquad (1)$$

Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$p_{n-1}(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\cdot\frac{[m(t+s)-m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την (2) μετά από κάποιες πράξεις διαπιστώνουμε ότι η έκφραση

$$p_n(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\cdot\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}$$

επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (1). Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη.