Τιμολόγηση δικαιώματος αγοράς ή πώλησης μετοχών

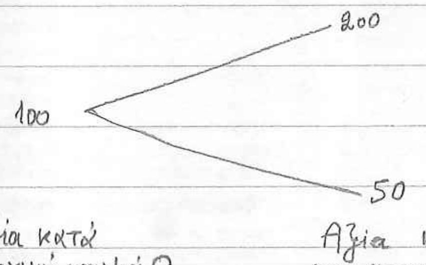
Σε καταστάσεις κατά τις οποίες χρηματικά ποσά πρόκειται να εισπραχτούν ή να πληρωθούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την χρονική αξία του χρήματος. Ένα χρηματικό ποσό v το οποίο θα δοθεί την χρονική στιγμή t στο μέλλον δεν έχει την ίδια αξία με το ίδιο v, αν αυτό πρόκειται να δοθεί αμέσως. Αυτό οφείλεται στο ότι, αν σε κάποιον δοθεί αμέσως το ποσό v, έχει τη δυνατότητα να το δανείσει με τόκο και έτσι θα έχει αξία μεγαλύτερη από v την χρονική στιγμή t.

Παίρνοντας υπ' όψιν την παραπάνω παρατήρηση, θα υποθέσουμε ότι η αξία κατά την χρονική στιγμή 0 (που ονομάζεται παρούσα αξία) του ποσού v, το οποίο θα εισπραχτεί την χρονική στιγμή t, είναι $ve^{-\alpha t}$. Ο αριθμός $\alpha > 0$ συχνά ονομάζεται αποπληθωριστικός παράγων (discount factor).

Η υπόθεση της αποπληθωριστικής συνάρτησης $e^{-\alpha t}$ ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι κάποιος εισπράττει τόκο με συνεχή σύνθετο ρυθμό (continuously compounded rate) ίσο με ποσοστό 100α ανά μονάδα χρόνου.

Τώρα θα θεωρήσουμε ένα απλό μοντέλο για την αγορά μιάς μετοχής σε κάποια μελλοντική στιγμή με μία προκαθορισμένη τιμή.

Υποθέτουμε ότι η παρούσα αξία μιάς μετοχής είναι \$100, και υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ότι σε μία χρονική περίοδο θα είναι \$200 ή \$50.



Πρέπει να τονιστεί ότι οι αξίες κατά την χρονική στιγμή 1 είναι οι παρούσες αξίες. Δηλαδή, αν ο αποπληθωριστικός παράγων είναι α, τότε οι πραγματικές δυνατές αξίες είναι $200e^{\alpha}$ ή $50e^{\alpha}$. Για να διατηρήσουμε τον συμβολισμό απλό, θα θεωρούμε ότι όλες οι αξίες είναι παρούσες αξίες.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο γ, με κόστος ίσο με $c\gamma$, μπορείτε να αγοράσετε κατά την χρονική στιγμή 0 το δικαίωμα (option) να αγοράσετε γ μετοχές κατά την χρονική στιγμή 1 με κόστος \$150 ανα μετοχή. Έτσι, για παράδειγμα, αν αγοράσετε αυτό το δικαίωμα και η αξία της μετοχής γίνει \$200, τότε θα ασκήσετε το δικαίωμα κατά την χρονική στιγμή 1 και θα πραγματοποιήσετε ένα κέρδος ίσο με \$200 - 150 = \$50 για κάθε μία από τις y μονάδες του δικαιώματος που αγοράσατε. Αν όμως η αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 γίνει \$50, τότε το δικαίωμα που αγοράσατε δεν θα έχει καμμία αξία κατά την χρονική στιγμή 1. Επιπροσθέτως, με κόστος $100x$ μπορείτε να αγοράσετε x μετοχές την χρονική στιγμή 0, και αυτές θα αξίζουν $200x$ ή $50x$ κατά την χρονική στιγμή 1.

Θα υποθέσουμε ότι το x και το y μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό (ή μηδέν). Δηλαδή μπορείτε να αγοράσετε ή να πουλήσετε τις μετοχές και τα δικαιώματα. Για παράδειγμα, αν x είναι αρνητικό τότε θα πουλήσετε $-x$ μετοχές, λαμβάνοντας το ποσό $-100x$ και θα έχετε την υποχρέωση να αγοράσετε $-x$ μετοχές κατα την χρονική στιγμή 1 με κόστος \$200 ή \$50 ανά μετοχή.

Επιθυμούμε να βρούμε την κατάλληλη τιμή του C, δηλαδή το κόστος του δικαιώματος. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι εκτός αν $C = 50/3$ υπάρχει ένας συνδυασμός αγορών, ο οποίος πάντοτε θα έχει ως αποτέλεσμα κάποιο θετικό κέρδος.

Για να δείξουμε αυτό, υποθέτουμε ότι κατά την χρονική στιγμή 0

αγοράζουμε x μετοχές
και
αγοράζουμε y δικαιώματα,

όπου τα x και y (τα οποία μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά) θα προσδιοριστούν. Η αξία της περιουσίας μας κατά την χρονική στιγμή 1 εξαρτάται από την αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\text{αξία της περιουσίας μας κατα την χρονική στιγμή 1} = \begin{cases} 200x + 50y, & \text{αν η αξία της μετοχής κατα την χρονική στιγμή 1 είναι 200} \\ 50x, & \text{αν η αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 είναι 50} \end{cases}$$

Ο προηγούμενος τύπος εξηγείται ως εξής: Αν η αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 γίνει 200, τότε οι x μετοχές θα αξίζουν $200x$, και οι y μονάδες του δικαιώματος να αγοράσετε μία μετοχή με 150, αξίζουν $(200-150)y$. Από την άλλη πλευρά, αν η αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 γίνει 50, τότε οι x μετοχές θα αξίζουν $50x$ και οι y μονάδες του δικαιώματος δεν θα έχουν καμία αξία.

Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε το y έτσι ώστε η αξία της περιουσίας μας κατά την χρονική στιγμή 1 είναι η ίδια για οποιαδήποτε αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1. Δηλαδή, επιλέγουμε το y έτσι ώστε

$$200x + 50y = 50x$$

ή

$$y = -3x$$

Παρατηρούμε ότι το y έχει αντίθετο πρόσημο από το x. Αν το x είναι θετικό και, επομένως, x μετοχές αγοράζονται κατά την χρονική στιγμή 0, τότε $3x$ μονάδες του δικαιώματος πουλιούνται την ίδια χρονική στιγμή. Ομοίως, αν το x είναι αρνητικό, τότε $-x$ μετοχές πουλιούνται κατά την χρονική στιγμή 0 και $-3x$ μονάδες του δικαιώματος αγοράζονται κατά την ίδια χρονική στιγμή.

Συνεπώς, με $y = -3x$, η αξία της περιουσίας μας κατά την χρονική στιγμή 1 είναι

$$\text{αξία περιουσίας}_{\text{την χρονική στιγμή } 1} = 50x$$

Αφού το αρχικό κόστος της αγοράς x μετοχών και των $-3x$ μονάδων του δικαιώματος είναι

$$\text{αρχικό κόστος} = 100x - 3xc$$

βλέπουμε ότι το κέρδος της συναλλαγής είναι

$$\text{κέρδος} = 50x - (100x - 3xc) = x(3c - 50)$$

Συνεπώς, αν $3c - 50 = 0$, τότε το κέρδος ισούται με 0; Αν $3c \neq 50$, μπορούμε να εγγυηθούμε ένα θετικό κέρδος (χωρίς να έχει σημασία ποιά θα είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 1) επιλέγοντας θετικό x όταν $3c > 50$ και επιλέγοντας αρνητικό x αν $3c < 50$.

Γιά παράδειγμα, αν η τιμή μιάς μονάδας του δικαιώματος είναι $C=20$, τότε η αγορά μιάς μετοχής $(x=1)$ και η ταυτόχρονη πώληση 3 μονάδων του δικαιώματος $(y=-3)$ αρχικά μάς κοστίζει $100-3*20=40$. Όμως, η αξία της περιουσίας μας την χρονική στιγμή 1 είναι 50 και στην περίπτωση που η αξία της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 είναι 200 και στην περίπτωση που η αξία της μετοχής είναι 50. Συνεπώς, ένα εγγυημένο κέρδος ίσο με 10 επιτυγχάνεται. Ομοίως, αν η τιμή μιάς μονάδας του δικαιώματος είναι $C=15$, τότε η πώληση μιάς μετοχής $(x=-1)$ και η αγορά 3 μονάδων του δικαιώματος $(y=3)$ οδηγεί σε ένα αρχικό κέρδος ίσο με $100-45=55$. Από την άλλη πλευρά, η αξία της περιουσίας μας κατά την χρονική στιγμή 1 είναι -50. Άρα, ένα εγγυημένο κέρδος ίσο με 5 επιτυγχάνεται.

Μία επενδυτική στρατηγική που δίνει πάντα θετικό κέρδος ονομάζεται arbitrage (εξισορροπητική κερδοσκοπία). Οπότε, όπως είδαμε, η μοναδική τιμή του C που δεν έχει ως αποτέλεσμα το arbitrage είναι $C=50/3$.

Το Θεώρημα Arbitrage

Θεωρούμε ένα πείραμα με σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων $S=\{1,2,\dots,m\}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n διαθέσιμα στοιχήματα. Αν το ποσό x διατεθεί στο στοίχημα i, τότε λαμβάνουμε το ποσό $x r_i(j)$ αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι j. Με άλλα λόγια, $r_i(\cdot)$ είναι η συνάρτησης απολαβής (return function) αν στοιχηματίσουμε μία χρηματική μονάδα στο στοίχημα i.

Το ποσό που στοιχηματίζουμε σ' ένα στοίχημα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό ή μηδέν.

Ένα στοιχηματικό σχέδιο (betting scheme) είναι ένα διάνυσμα $\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots,x_n)$ με την ερμηνεία ότι το ποσο x_1 στοιχηματίζεται στο στοίχημα 1, το ποσό x_2 στοιχηματίζεται στο στοίχημα 2, ..., και το ποσό x_n στοιχηματίζεται στο στοίχημα n. Αν το αποτέλεσμα το πειράματος είναι j, τότε η απολαβή από το στοιχηματικό σχέδιο $\underset{\sim}{x}$ είναι:

$$\text{απολαβή από το } \underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j)$$

Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι δύο πράγματα μπορεί να συμβούν:

$1^{ον}$) Υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\underset{\sim}{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ επί του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος, βάσει του οποίου κάθε ένα από τα στοιχήματα έχει αναμενόμενη απολαβή 0, ή

$2^{ον}$) Υπάρχει ένα επενδυτικό σχέδιο με εγγυημένο θετικό κέρδος.

<u>Θεώρημα</u> (Το Θεώρημα Arbitrage)

Ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

(i) Υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\underset{\sim}{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ για το οποίο

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \, r_i(j) = 0 \quad \text{για όλα τα } i = 1, \ldots, n$$

ή

(ii) Υπάρχει ένα στοιχηματικό σχέδιο $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ για το οποίο

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, r_i(j) > 0 \quad \text{γιά όλα τα } j = 1, \ldots, m$$

Με άλλα λόγια, αν η τ.μ. X είναι ίση με το αποτέλεσμα του πειράματος, τότε το Θεώρημα Arbitrage δηλώνει ότι υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\underset{\sim}{p}$ επί την X τέτοιο ώστε:

$$E_{\underset{\sim}{p}} \left[r_i(X) \right] = 0, \quad \text{γιά όλα τα } i = 1, \ldots, n$$

ή υπάρχει ένα επενδυτικό σχέδιο που οδηγεί σε βέβαιο κέρδος.

<u>Παρατήρηση</u>: Αυτό το θεώρημα είναι επακόλουθο του θεωρήματος του χωρίζοντος υπερεπιπέδου (separating hyperplane theorem), το οποίο συχνά χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε το θεώρημα του δυϊσμού στον γραμμικό προγραμματισμό.

Η θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε μία στοιχηματική στρατηγική, η οποία εγγυάται τη μέγιστη απολαβή. Υποθέτουμε ότι η απόλυτη τιμή του ποσού που στοιχηματίζουμε σε κάθε στοίχημα είναι μικρότερο ή ίσο με 1

Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα $\underset{\sim}{x}$ που δίνει το μέγιστο εγγυημένο κέρδος (το οποίο συμβολίζουμε με v) πρέπει να διαλέξουμε το $\underset{\sim}{x}$ και το v έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε το v αν ισχύουν οι περιορισμοί

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) \geqslant v \qquad \text{γιά} \quad j=1,\dots,m$$

$$-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad i=1,\dots,n$$

Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να λυθεί με γνωστές μεθόδους (όπως ο αλγόριθμος Simplex). Το Θεώρημα arbitrage δηλώνει ότι το βέλτιστο v θα είναι θετικό εκτός αν υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\underset{\sim}{p}$ τέτοιο ώστε $\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0$, για $i=1,\dots,n$.

<u>Παράδειγμα</u>. Σε μερικές περιπτώσεις, το μόνο είδος στοιχημάτων που επιτρέπεται είναι να επιλέγει κάποιος κάποιο από τα αποτελέσματα $i=1,\dots,m$ και να στοιχηματίζει ότι το i θα είναι αποτέλεσμα του πειράματος. Συνήθως μιλάμε για τέτοια στοιχήματα με όρους αποδόσεων. Αν η απόδοση γιά το αποτέλεσμα i είναι O_i (που συχνά αναφέρεται ως «O_i προς 1»), τότε η τοποθέτηση μιάς μονάδας στο αντίστοιχο στοίχημα θα αποδώσει είτε O_i, αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι i, είτε -1, αν το αποτέλεσμα δεν είναι i. Δηλαδή, η τοποθέτηση μιάς μονάδας στο στοίχημα i θα έχει είτε κέρδος O_i είτε απώλεια -1. Η συνάρτηση απόδοσης γιά ένα τέτοιο στοίχημα είναι

$$r_i(j) = \begin{cases} O_i & \text{αν} \quad j=i, \\ -1 & \text{αν} \quad j\neq i. \end{cases}$$

Υποθέστε ότι δίνονται οι αποδόσεις $O_1, O_2, \dots, O_m$. Για να μην υπάρχει βέβαιο κέρδος, θα πρέπει να υπάρχει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\underset{\sim}{p} = (p_1,\dots,p_m)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i=1,\dots,m$

$$0 = E_{\underset{\sim}{p}}[r_i(X)] = O_i p_i - (1-p_i)$$

Δηλαδή, θα πρέπει

$$p_i = \frac{1}{1+O_i}$$

Εφόσον το άθροισμα των p_i, $i=1,\dots,m$ πρέπει να είναι 1, η συνθήκη για να μην υπάρχει arbitrage είναι

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+o_i} = 1$$

Δηλαδή, αν $\sum_{i=1}^{m} (1+o_i)^{-1} \neq 1$, τότε υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχουν τρία δυνατά αποτελέσματα και δίνονται οι ακόλουθες αποδόσεις:

Αποτέλεσμα	Απόδοση
1	1
2	2
3	3

Δηλαδή, οι αποδόσεις είναι 1 προς 1 για το αποτέλεσμα 1, 2 προς 1 για το αποτέλεσμα 2, και 3 προς 1 για το αποτέλεσμα 3. Αφού

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \neq 1$$

υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Ένας τρόπος είναι να στοιχηματίσετε -1 στο αποτέλεσμα 1 (οπότε είτε θα κερδίσετε 1, αν το αποτέλεσμα δεν είναι 1, είτε θα χάσετε 1 αν το αποτέλεσμα είναι 1), -0.7 στο αποτέλεσμα 2 (οπότε είτε θα κερδίσετε 0.7, αν το αποτέλεσμα δεν είναι 2, είτε θα χάσετε 1.4, αν είναι 2), και -0.5 στο αποτέλεσμα 3 (οπότε είτε θα κερδίσετε 0.5, αν το αποτέλεσμα δεν είναι 3, είτε θα χάσετε 1.5, αν είναι 3). Αν το πείραμα καταλήξει στο αποτέλεσμα 1, θα κερδίσετε $-1+0.7+0.5=0.2$, αν καταλήξει στο αποτέλεσμα 2, θα κερδίσετε $1-1.4+0.5=0.1$, αν καταλήξει στο αποτέλεσμα 3, θα κερδίσετε $1+0.7-1.5=0.2$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, κερδίζετε ένα θετικό ποσό.

Παρατήρηση: Αν $\sum_{i=1}^{m} (1+o_i)^{-1} \neq 1$, τότε το στοιχηματικό σχέδιο

$$x_i = \frac{(1+o_i)^{-1}}{1-\sum_{i=1}^{m}(1-o_i)^{-1}}, \quad i=1,\dots,m$$

πάντα θα δώσει κέρδος ακριβώς ίσο με 1.

<u>Παράδειγμα</u> Ας επαναθεωρήσουμε το παράδειγμα για την τιμολόγηση δικαιώματος, στο οποίο η αρχική τιμή της μετοχής είναι 100 και η παρούσα αξία της κατά την χρονική στιγμή 1 είναι 200 ή 50. Με κόστος ίσο με C ανά μετοχή μπορούμε να αγοράσουμε κατά την χρονική στιγμή 0 το δικαίωμα να αγοράσουμε τη μετοχή κατά τη χρονική στιγμή 1 με την προκαθορισμένη τιμή 150 ανά τεμάχιο. Το πρόβλημα είναι να βρούμε την τιμή του C ώστε να μην υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Arbitrage για τη λύση του προβλήματος.

Θα θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμα του πειράματος είναι η τιμή της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1. Συνεπώς υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα.

Υπάρχουν επίσης δύο στοιχήματα: Να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) την μετοχή και να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) το δικαίωμα. Από το Θεώρημα arbitrage, δεν υπάρχει βέβαιο κέρδος αν υπάρχει διάνυσμα πιθανοτήτων $(p, 1-p)$ που κάνει την αναμενόμενη απόδοση και για τα δύο στοιχήματα ίση με μηδέν.

Η απόδοση, αν αγοράσουμε μία μετοχή είναι:

$$\text{Απόδοση} = \begin{cases} 200-100 = 100 & \text{αν η αξία της μετοχής είναι } 200 \text{ την χρονική στιγμή } 1 \\ 50-100 = -50 & \text{αν η αξία της μετοχής είναι } 50 \text{ την χρονική στιγμή } 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, αν p είναι η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να είναι 200 κατά την χρονική στιγμή 1, τότε

$$E[\text{Απόδοση}] = 100p - 50(1-p)$$

Θέτοντας $E[\text{Απόδοση}] = 0$, παίρνουμε $p = \frac{1}{3}$

Δηλαδή, το μοναδικό διάνυσμα πιθανοτήτων $(p, 1-p)$ για το οποίο το στοίχημα 1 έχει αναμενόμενη απόδοση ίση με μηδέν είναι το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Η απόδοση της αγοράς ενός δικαιώματος για την αγορά μετοχής κατά την χρονική στιγμή 1 είναι

$$\text{Απόδοση} = \begin{cases} 50 - C & \text{αν η τιμή κατά την χρονική στιγμή 1 είναι 200} \\ -C & \text{αν η τιμή κατά την χρονική στιγμή 1 είναι 50} \end{cases}$$

Άρα, η αναμενόμενη απόδοση όταν $p = \frac{1}{3}$ είναι

$$E[\text{Απόδοση}] = (50 - C)\frac{1}{3} - C\frac{2}{3} = \frac{50}{3} - C$$

Έτσι, Από το Θεώρημα Arbitrage έπεται ότι η μοναδική τιμή του C για την οποία δεν υπάρχει σίγουρο κέρδος είναι $C = \frac{50}{3}$.
Αυτό το αποτέλεσμα το είχαμε πάρει ακολουθώντας διαφορετική προσέγγιση.

Ο Τύπος Black-Scholes για την τιμολόγηση Δικαιώματος

Υποθέτουμε ότι η παρούσα τιμή μιας μετοχής είναι $X(0) = x_0$, και έστω $X(t)$ η αξία της κατά την χρονική στιγμή t. Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε για την μετοχή κατά το χρονικό διάστημα από την χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή T. Υποθέτουμε ότι ο αποπληθωριστικός παράγων είναι $\alpha > 0$, και έτσι η παρούσα αξία της αξίας της μετοχής κατά την χρονική στιγμή t είναι $e^{-\alpha t}X(t)$.

Θεωρούμε την εξέλιξη της αξίας της μετοχής καθώς προχωρά ο χρόνος ως το πείραμά μας, και έτσι το αποτέλεσμα του πειράματος είναι η τιμή της συνάρτησης $X(t)$, $0 \leq t \leq T$. Τα διαθέσιμα στοιχήματα είναι τα εξής: Για οποιαδήποτε $s < t$ μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διαδικασία μέχρι την χρονική στιγμή s και να αγοράσουμε (ή να πουλήσουμε) μετοχές με τιμή $X(s)$ και μετά να πουλήσουμε (ή να αγοράσουμε) αυτές τις μετοχές κατά την χρονική στιγμή t με τιμή $X(t)$. Επιπροσθέτως, θα υποθέσουμε ότι μπορούμε να αγοράσουμε οποιοδήποτε από N διαφορετικά δικαιώματα κατά την χρονική στιγμή 0. Το δικαίωμα i, το οποίο κοστίζει C_i ανά τεμάχιο μετοχής, μας δίνει το δικαίωμα να αγοράσουμε τεμάχια της μετοχής κατά την χρονική στιγμή t_i με μία προκαθορισμένη τιμή ίση με K_i ανά τεμάχιο μετοχής, $i = 1, \dots, N$.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των c_i για τις οποίες δεν υπάρχει στοιχηματική στρατηγική που οδηγεί σε βέβαιο κέρδος. Υποθέτοντας ότι το Θεώρημα Arbitrage μπορεί να γενικευτεί (για να χειριστούμε την παραπάνω κατάσταση στην οποία το αποτέλεσμα του πειράματος είναι μία συνάρτηση), έπεται ότι δεν θα υπάρξει βέβαιο κέρδος αν και μόνον αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας επί του συνόλου των αποτελεσμάτων υπό το οποίο όλα τα στοιχήματα έχουν αναμενόμενη απόδοση 0. Έστω P μέτρο πιθανότητας επί του συνόλου των αποτελεσμάτων. Θεωρούμε κατ' αρχάς το εξής στοίχημα: Παρατηρούμε την μετοχή μέχρι την χρονική στιγμή s και αγοράζουμε (ή πουλάμε) την μετοχή με την πρόθεση να την πουλήσουμε (ή να την αγοράσουμε) κατά την χρονική στιγμή t, $0 \leq s < t \leq T$. Η παρούσα αξία του ποσού που πληρώσαμε για την μετοχή είναι $e^{-\alpha s}X(s)$, ενώ η παρούσα αξία του ποσού που εισπράξαμε είναι $e^{-\alpha t}X(t)$. Συνεπώς, γιά να είναι η αναμενόμενη απόδοση αυτού του στοιχήματος ίση με 0 όταν P είναι μέτρο πιθανότητας επί της $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, πρέπει να ισχύει:

$$E_P\left[e^{-\alpha t}X(t) \,\middle|\, X(u), 0 \leq u \leq s\right] = e^{-\alpha s}X(s) \qquad (9)$$

Θεωρούμε το στοίχημα της αγοράς ενός δικαιώματος. Υποθέτουμε ότι το δικαίωμα δίνει την δυνατότητα να αγοράσουμε μία μετοχή κατά την χρονική στιγμή t με τιμή K. Κατά την χρονική στιγμή t, η αξία αυτού του δικαιώματος είναι:

$$\text{αξία του δικαιώματος κατά την χρονική στιγμή } t = \begin{cases} X(t) - K & \text{αν } X(t) \geq K \\ 0 & \text{αν } X(t) < K \end{cases}$$

Δηλαδή, η αξία του δικαιώματος κατά την χρονική στιγμή t είναι $(X(t)-K)^+$. Άρα η παρούσα τιμή της αξίας του δικαιώματος είναι $e^{-\alpha t}(X(t)-K)^+$. Αν C είναι το κόστος κατά την χρονική στιγμή 0 αυτού του δικαιώματος, βλέπουμε ότι, έχοντας αγοράσει αυτό το δικαίωμα, για να έχουμε αναμενόμενη απόδοση 0, πρέπει

$$E_P\left[e^{-\alpha t}(X(t)-K)^+\right] = C \qquad (10)$$

Από το Θεώρημα Arbitrage, αν μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας P επί του συνόλου των αποτελεσμάτων που ικανοποιεί την Εξίσωση (9), και αν c (το οποίο ορίζεται ως το κόστος του δικαιώματος να αγοράσουμε μία μετοχή κατά την χρονική στιγμή t με μία προκαθορισμένη τιμή K) δίνεται από την (10), τότε δεν υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

Από την άλλη πλευρά, αν για κάποιες δοσμένες τιμές c_i, $i=1,\dots,N$, δεν υπάρχει μέτρο πιθανότητας P που ικανοποιεί την (9) και την ισότητα

$$c_i = E_P\left[e^{-\alpha t_i}\left(X(t_i)-K_i\right)^+\right], \quad i=1,\dots,N$$

τότε ένα βέβαιο κέρδος είναι δυνατό.

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα μέτρο πιθανότητας P επί του αποτελέσματος $X(t)$, $0\leq t\leq T$, που ικανοποιεί την (9).

Ας υποθέσουμε ότι

$$X(t) = x_0\, e^{Y(t)}$$

όπου $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ είναι μία διαδικασία κίνησης Brown με συντελεστή μετατόπισης μ και παράμετρο διακύμανσης σ^2. Δηλαδή, η διαδικασία $\{X(t),\ t\geq 0\}$ είναι διαδικασία γεωμετρικής κίνησης Brown.

Από την Εξίσωση (8) έχουμε ότι, για $s<t$,

$$E\left[X(t)\mid X(u),\ 0\leq u\leq s\right] = X(s)\, e^{(t-s)(\mu+\sigma^2/2)}$$

Άρα, αν επιλέξουμε τα μ και σ^2 έτσι ώστε

$$\mu + \sigma^2/2 = \alpha$$

τότε η Εξίσωση (9) ικανοποιείται. Δηλαδή, επιλέγοντας το μέτρο πιθανότητας P που καθορίζει την στοχαστική διαδικασία $\{x_0 e^{Y(t)},\ 0\leq t\leq T\}$, όπου $\{Y(t)\}$ είναι κίνηση Brown με παράμετρο μετατόπισης μ και παράμετρο διακύμανσης σ^2, με $\mu+\sigma^2/2=\alpha$, η Εξίσωση (9) ικανοποιείται.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι αν τιμολογήσουμε το δικαίωμα να αγοράσουμε μία μετοχή κατά την χρονική στιγμή t με μία προκαθορισμένη τιμή K με

$$c = E_p\left[e^{-\alpha t}(X(t)-k)^+\right]$$

τότε δεν υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Αφού $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$, όπου η $Y(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή μt και διακύμανση $t\sigma^2$, βλέπουμε ότι

$$c e^{\alpha t} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_0 e^{y} - k)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu t)^2}{2t\sigma^2}} dy$$

$$= \int_{\log(K/x_0)}^{\infty} (x_0 e^{y} - k) \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu t)^2}{2t\sigma^2}} dy$$

Κάνοντας την αλλαγή της μεταβλητής $w = \frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}$ έχουμε

$$c e^{-\alpha t} = x_0 e^{\mu t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{\sigma w \sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw - K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \qquad (11)$$

όπου

$$a = \frac{\log(K/x_0) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Τώρα, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{\sigma w \sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw = e^{t\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-(w-\sigma\sqrt{t})^2/2} dw$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(\sigma\sqrt{t}, 1) \geq a\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0,1) \geq a - \sigma\sqrt{t}\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0,1) \leq -(a - \sigma\sqrt{t})\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} \Phi(\sigma\sqrt{t} - a)$$

όπου $N(m, v)$ είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή m και διακύμανση v, και Φ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$.

Από την Εξίσωση (11) βλέπουμε ότι:

$$ce^{\alpha t} = x_0 e^{\mu t + \sigma^2 t/2}\,\Phi(\sigma\sqrt{t} - a) - K\,\Phi(-a)$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2} = a$$

και θέτοντας $b = -a$, μπορούμε να γράψουμε την πιό πάνω ισότητα ως εξής:

$$c = x_0\,\Phi(\sigma\sqrt{t} + b) - K\,e^{-\alpha t}\Phi(b) \qquad (12)$$

όπου

$$b = \frac{\alpha t - \sigma^2 t/2 - \log(K/x_0)}{\sigma\sqrt{t}}$$

Ο τύπος για την τιμή του δικαιώματος που δίνεται από την (12) εξαρτάται από την αρχική τιμή της μετοχής x_0, την χρονική στιγμή της άσκησης του δικαιώματος t, το ποσό K που δίνουμε για να αγοράσουμε μία μετοχή αν εξασκήσουμε το δικαίωμα, τον αποπληθωριστικό παράγοντα α και την τιμή σ^2. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του σ^2, αν τα δικαιώματα έχουν τιμολογηθεί σύμφωνα με τον τύπο (12), τότε δεν υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Όμως, καθώς πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι η τιμή της μετοχής πράγματι ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown - δηλαδή $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$ όπου $Y(t)$ είναι κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ^2 - έχει προταθεί ότι είναι φυσικό να τιμολογήσουμε το δικαίωμα σύμφωνα με τον τύπο (12) με την παράμετρο σ^2 ίση με την εκτιμώμενη τιμή (βλέπε την παρατήρηση πιό κάτω) της διακύμανσης υπό την υπόθεση ότι έχουμε το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown. Όταν αυτό γίνει, ο τύπος (12) ονομάζεται Black - Scholes εκτίμηση του κόστους του δικαιώματος. Είναι ενδιαφέρον που αυτή η εκτίμηση δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου μετατόπισης μ αλλά μόνο από την παράμετρο της διακύμανσης σ^2.

Αν το δικαίωμα μπορεί να ανταλλαγεί, τότε ο τύπος (12) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε την τιμή του έτσι ώστε να μην υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Αν κατά την χρονική στιγμή s η τιμή της μετοχής είναι $X(s)=x_s$, τότε η τιμή του (t, K) δικαιώματος - δηλαδή του δικαιώματος να αγοράσουμε μία μετοχή κατά την χρονική στιγμή t με τιμή K - προσδιορίζεται αντικαθιστώντας το t με το $t-s$ και το x_0 με το x_s στην εξίσωση (12).

<u>Παρατήρηση</u>: Αν παρατηρήσουμε μια κίνηση Brown με παράμετρο διακύμανσης σ^2 κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, τότε θα μπορούσαμε θεωρητικά να πάρουμε μία ακριβή εκτίμηση του σ^2. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι παρατηρούμε μία τέτοια διαδικασία $\{Y(s)\}$ κατά το διάστημα $[0,t]$. Τότε, για σταθερό h, έστω $N=[t/h]$. Θέτουμε

$$
\begin{aligned}
W_1 &= Y(h)-Y(0),\\
W_2 &= Y(2h)-Y(h),\\
&\vdots\\
W_N &= Y(Nh)-Y(Nh-h)
\end{aligned}
$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $W_1,\dots,W_N$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Είναι κανονικές τ.μ. με διακύμανση $h\sigma^2$.

Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η τ.μ.

$$\frac{(N-1)S^2}{\sigma^2 h} \sim \chi^2_{N-1},$$

όπου S^2 είναι η δειγματική διακύμανση που ορίζεται ως εξής:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(W_i-\overline{W})^2$$

Αφού η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της κατανομής χ^2_k είναι ίσες με k και $2k$, αντίστοιχα, βλέπουμε ότι:

$$E\left(\frac{(N-1)S^2}{\sigma^2 h}\right)=N-1 \text{ και } Var\left(\frac{(N-1)S^2}{\sigma^2 h}\right)=2(N-1)$$

Από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$E\left(\frac{S'^2}{h}\right)=\sigma^2 \quad \text{και} \quad Var\left(\frac{S'^2}{h}\right)=\frac{2\sigma^4}{N-1}$$

Συνεπώς, καθώς επιλέγουμε μικρότερο h (οπότε το $N=\left[\frac{t}{h}\right]$ γίνεται μεγαλύτερο) η διακύμανση της αμερόληπτης εκτιμήτριας του σ^2 γίνεται αυθαίρετα μικρή.

Ο τύπος (12) δεν είναι ο μόνος τρόπος που τα δικαιώματα μπορούν να τιμολογηθούν ώστε να μην είναι δυνατή ευκαιρία για βέβαιο κέρδος. Έστω $\{X(t),\ 0\leq t\leq T\}$ οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία που, για $s<t$, ικανοποιεί την σχέση

$$E\left[e^{-\alpha t}X(t)\,\middle|\,X(u),\ 0\leq u\leq s\right]=e^{-\alpha s}X(s) \qquad (13)$$

(δηλαδή η σχέση (9) ικανοποιείται). Θέτοντας το C, που είναι το κόστος του δικαιώματος να αγοράσουμε μία μετοχή κατά την χρονική στιγμή t με τιμή K, ίσο με

$$C=E\left[e^{-\alpha t}(X(t)-k)^+\right] \qquad (14)$$

Προκύπτει ότι δεν είναι δυνατή η ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

Ένα άλλος τύπος στοχαστικής διαδικασίας, εκτός από τη Γεωμετρική κίνηση Brown, που ικανοποιεί τη σχέση (13) λαμβάνεται ως εξής: Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με κοινή μέση τιμή μ, και υποθέτουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι ανεξάρτητη από την $\{N(t), t\geq 0\}$, η οποία είναι μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

Έστω

$$X(t)=x_0\prod_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$X(t)=x_0\prod_{i=1}^{N(s)}Y_i\prod_{j=N(s)+1}^{N(t)}Y_j$$

και την ιδιότητα των ανεξαρτήτων προσαυξήσεων της διαδικασίας Poisson, βλέπουμε ότι, για $s<t$,

$$E\left[X(t) \mid X(u),\ 0\leq u\leq s\right] = X(s)\, E\left[\prod_{j=N(s)+1}^{N(t)} Y_j\right]$$

Δεσμευόμενοι επί του αριθμού των γεγονότων ανάμεσα στις χρονικές στιγμές s και t έχουμε:

$$E\left[\prod_{j=N(s)+1}^{N(t)} Y_j\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda(t-s)(1-\mu)}$$

Επομένως:

$$E\left[X(t) \mid X(u),\ 0\leq u\leq s\right] = X(s)\, e^{-\lambda(t-s)(1-\mu)}$$

Άρα, αν επιλέξουμε τα λ και μ έτσι ώστε

$$\lambda(1-\mu) = -\alpha$$

τότε η Εξίσωση (13) ικανοποιείται. Ως εκ τούτου, αν για οποιαδήποτε τιμή του λ, υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές Y_i, $i=1,2,\ldots$ έχουν οποιεσδήποτε κατανομές με κοινή μέση τιμή ίση με $\mu = 1+\frac{\alpha}{\lambda}$ και τιμολογήσουμε τα δικαιώματα σύμφωνα με την Εξίσωση (14), τότε δεν υπάρχει arbitrage, δηλαδή ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t\geq 0\}$ ικανοποιεί την Εξίσωση (13), τότε η διαδικασία $\{e^{-\alpha t}X(t), t\geq 0\}$ ονομάζεται Martingale. Άρα, οποιαδήποτε τιμολόγηση δικαιωμάτων για την οποία το αναμενόμενο κέρδος ενός δικαιώματος είναι ίσο με 0 όταν η διαδικασία $\{e^{-\alpha t}X(t)\}$ είναι martingale, δεν οδηγεί σε arbitrage (δηλαδή σε ευκαιρία για βέβαιο κέρδος).

Δηλαδή, αν επιλέξουμε μία διαδικασία Martingale $\{Z(t)\}$ και ορίσουμε ως το κόστος ενός (t,k) δικαιώματος ως

$$c = E\left[e^{-\alpha t}\left(e^{\alpha t}Z(t)-k\right)^{+}\right]$$
$$= E\left[\left(Z(t)-ke^{-\alpha t}\right)^{+}\right]$$

Τότε δεν υπάρχει ευκαιρία για βέβαιο κέρδος.

Επιπροσθέτως, ενώ δεν θεωρήσαμε τον τύπο του στοιχήματος στο οποίο η μετοχή που αγοράζεται κατά την χρονική στιγμή s δεν πουλιέται σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά σε μία τυχαία χρονική στιγμή που εξαρτάται από την κίνηση της μετοχής, μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας αποτελέσματα για τις Martingales, ότι η αναμενόμενη απόδοση τέτοιων στοιχημάτων είναι επίσης 0.