Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Μάθημα: Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ
Διδάσκων: Άγγελος Αλεξόπουλος
Βοηθός: Γιώργος Γούναρης (gounarisgeo@aueb.gr)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Φυλλάδιο 3

Άσκηση 3.1

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και $B=\left(w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$ μια διατεταγμένη βάση του. Τότε να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $[\ ]_B : V \to F^{n\times 1}$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 3.2

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι X και Y επί του F και f: X → Y, g: X→ Y δύο γραμμικές απεικονίσεις. Να δείξετε ότι η απεικόνιση T: X → Y που ορίζεται ως T(x)= nf(x)+γg(x) είναι γραμμική.

Άσκηση 3.3

Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_1 = 0,1,1 \ ,\ \vec{e}_2 = 1,0,1 \ ,\ \vec{e}_3 = 1,1,0$$

Και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

$$\vec{y}_1 = -2,3 \ ,\ \vec{y}_2 = 3,-1 \ ,\ \vec{y}_3 = 4,5$$

Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:
$\forall i = 1,2,3 : f\ \ \vec{e}_i\ = \vec{y}_i$.
Ακολούθως να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα και μια βάση για την εικόνα της f.

Άσκηση 3.4

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ και έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\ \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $f\ \ \mathrm{M}\ = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$. Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα Ker(f) και την εικόνα Im(f) της f.

Άσκηση 3.5

Θεωρούμε τη γραφική απεικόνιση $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f\ \ x,y,z,w\ =\ x-z+2w, -2x+y+2z, y+4w$

1) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της f.
2) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\left(1,\ 3,\ \kappa\right) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \kappa = 5$.
3) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a,b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\left(1,a,1,b\right) \in Ker(f)$;

Άσκηση 3.6

Έστω η βάση $\hat{e}=(e_1,e_2,e_3)$ του $\mathbb{R}^3$ με $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ και η βάση $\hat{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ με $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(0,0,1)$. Να δείξετε ότι η βάση $\hat{\alpha}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την $\hat{e}$ στην $\hat{\alpha}$.