Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης
Μάθημα: Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ
Διδάσκων: Άγγελος Αλεξόπουλος
Βοηθός: Γιώργος Γούναρης (gounarisgeo@aueb.gr)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Φυλλάδιο 2

Άσκηση 2.1 (Πρόταση 2.2)

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V. Να αποδείξετε ότι η τομή των υποχώρων αυτών είναι ένας υποχώρος του V.

Άσκηση 2.2

Αποδείξτε το κάτωθι θεώρημα

Θεώρημα Φ.2.1.: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και Β ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο Β είναι μία βάση του V.

(β) Κάθε στοιχείο ω του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Β.

Άσκηση 2.3

Πρόταση Φ.2.2.: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε κάθε δυο από τις παρακάτω προτάσεις συνεπάγεται την τρίτη:

(α) Η διάσταση του χώρου V είναι ν.

(β) Το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ παράγει τον χώρο V.

(γ) Το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

Άσκηση 2.4

Καθορίστε εάν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί. Εάν είναι, αποδείξτε το, εάν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα σε μία από τις ιδιότητες:

(α) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ with\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$

(β) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ with\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$

Άσκηση 2.5

Να δείξετε ότι τα παρακάτω διανύσματα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2.6

Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1 \ \text{-}2 \ 0 \ 1) \\
v_2 &= (\text{-}2 \ 0 \ 3 \ \text{-}1) \\
v_3 &= (\text{-}1 \ \text{-}2 \ 3 \ 0)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.7

Βρείτε τη διάσταση και μια βάση του διανυσματικού χώρου V που παράγεται από τα ακόλουθα διανύσματα:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1 \ \text{-}2 \ 4) \\
v_2 &= (3 \ 0 \ \text{-}1) \\
v_3 &= (0 \ 6 \ \text{-}13) \\
v_4 &= (1 \ 4 \ \text{-}9)
\end{aligned}
$$