



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Φυλλάδιο 1**

**Άσκηση 1.1**

Θεωρήστε τις ακόλουθες μήτρες (πίνακες):

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -8 \\ 2 & 5 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Ποιο είναι το **μέγεθος (τύπος)** του κάθε πίνακα; Ποιοι πίνακες είναι **τετραγωνικοί**; Ποιοι είναι οι **ανάστροφοι** του κάθε πίνακα;

(β) Να κάνετε τις πράξεις:  $2A, B+C, E+F$ .

(γ) Να υπολογίσετε τους πίνακες:  $BC, CB$ . Τι παρατηρείτε;

(δ) Μεταξύ των πινάκων  $D$  και  $E$ , με ποια σειρά μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός;

(ε) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $BK$  και  $KB$ . Τι παρατηρείτε;

(στ) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $CM$  και  $MC$ . Τι παρατηρείτε;

(ζ) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $B^2, E^2, G^{2024}, N^{2024}$ .

(η) Να κάνετε τις πράξεις:  $A'A, AA', B'B, BB', Q'Q$  και  $QQ'$ .

(θ) Να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα κάθε μήτρας.

**Άσκηση 1.2**

Θεωρήστε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

(α) Τι θα πρέπει να ισχύει προκειμένου οι παραπάνω μήτρες να είναι **μη-ιδιάζουσες** (*non singular*);

(β) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο της **προσαρτημένης μήτρας** (*adjoint matrix*).

(γ) Από τις μη-ιδιάζουσες μήτρες να υπολογίσετε τις αντίστροφές τους με τη μέθοδο των **Gauss-Jordan**.

### Άσκηση 1.3

Το σύστημα προέρχεται από το βιβλίο του Alpha C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, Inc.

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$6x + 3y + z = 22$$

$$x + 4y - 2z = 12$$

$$4x - y + 5z = 10$$

(α) Πότε ένα γραμμικό σύστημα είναι **συμβιβαστό** (έχει πραγματικές λύσεις) και πότε **αδύνατο**;

(β) Να εκφράσετε το πρόβλημα σε όρους πινάκων και να το λύσετε με τη χρήση του αντίστροφου πίνακα.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα με τον κανόνα του **Cramer**.

(δ) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss-Jordan**.

(ε) Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο **Gauss**.

### Άσκηση 1.4

Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό ομογενές σύστημα:

$$6x + 3y + z = 0$$

$$x + 4y - 2z = 0$$

$$4x - y + 5z = 0$$

(α) Πότε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα έχει μοναδική (τη μηδενική) λύση και πότε άπειρες;

(β) Να ελέγξετε αν το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.