10. Εξισώσεις Διαφορών.

10.1 Εξισώσεις Διαφορών 1ης τάξης

Έστω $t=0,1,2,\ldots$ διαφορετικές διακριτές χρονικές στιγμές ή περίοδοι. Το $t=0$ ονομάζεται αρχική στιγμή ή περίοδος.

Στις διαφορικές εξισώσεις η συνάρτηση $x(t)$ ορίζεται για οποιοδήποτε $t\in\mathbb{R}$. Στις εξισώσεις διαφορών η συνάρτηση $x(t)$ ορίζεται για τα διαφορετικά $t=0,1,\ldots$ Καθώς η $x(t)$ ορίζεται σε διακριτά σημεία, συνηθίζουμε αντί του συμβολισμού $x(t)$ να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό x_t. Μια εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης θα έχει τη γενική μορφή

$$x_{t+1} = f(t, x_t) \quad \text{για } t=0,1,2,\ldots$$

Η εξίσωση αυτή είναι πρώτης τάξης καθώς συνδέει την τιμή της x στην περίοδο $t+1$ με την αντίστοιχη τιμή της την προηγούμενη περίοδο (t). Δεδομένου του x_0 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(0, x_0)\\
x_2 &= f(1, x_1) = f(1, f(0, x_0))\\
x_3 &= f(2, x_2) = f(2, f(1, x_1))\\
&= f(2, f(1, f(0, x_0)))
\end{aligned}$$

κ.ο.κ. Δηλαδή για κάποια τιμή x_0 μπορούμε να υπολογίσουμε το x_t για οποιοδήποτε t. Μερικές φορές μπορούμε να βρούμε μια απλή συναρτησιακή μορφή για την x που να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών. Συχνά όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό. Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι μία συνάρτηση της μορφής $x_t = g(t;A)$ που ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών για κάθε τιμή του A, όπου A είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Συνήθως, σε κάθε επιλογή του x_0, υπάρχει μια τιμή για τη σταθερά A τέτοια ώστε

$$g(0,A) = x_0$$

Όπως είδαμε δεδομένου κάποιου x_0 μπορούμε να προσδιορίσουμε το x_t για οποιοδήποτε t. Στην πράξη στα οικονομικά χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε περισσότερα, όπως για παράδειγμα η συμπεριφορά της λύσης όταν το t γίνεται αρκετά μεγάλο, ή πως εξαρτάται η λύση από κάποιες παραμέτρους που επηρεάζουν την εξίσωση διαφορών.

Ένα άλλο πρόβλημα αφορά τον υπολογισμό του x_t όταν χρησιμοποιούμε υπολογιστές και το σφάλμα προσέγγισης που οι υπολογισμοί αυτοί εμπεριέχουν.

*Σημειώνεται ότι η εξίσωση διαφορών

$$x_{t+1} = f(t, x_t)$$

είναι στην ουσία μια αναδρομική εξίσωση. Η εξίσωση διαφορών έχει τη μορφή

$$\Delta x_t = \tilde{f}(t, x_t)$$

όπου $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$. Είναι προφανές ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες.

Θεωρούμε την απλή εξίσωση διαφορών

$$x_{t+1} = a x_t \quad , \quad t = 0, 1, \ldots$$

όπου a είναι μια σταθερά. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται ομογενής γιατί αν x_t είναι οποιαδήποτε λύση, το ίδιο θα ισχύει και για το $a x_t$ για κάθε a.

Δεδομένου κάποιου x_0 θα έχουμε

$$x_1 = a x_0$$
$$x_2 = a x_1 = a^2 x_0$$
$$x_3 = a x_2 = a^3 x_0 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Γενικά θα ισχύει $x_t = a^t x_0 \quad t = 0, 1, \ldots$
Για οποιαδήποτε x_0, δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών.

Παράδειγμα 10.1 Έστω η εξίσωση διαφορών $x_{t+1} = -2x_t$ και $x_0 = 12$. Από το προηγούμενο η λύση θα είναι

$$x_t = (-2)^t \cdot 12 = 12\,(-2)^t$$

Παράδειγμα 10.2 Δίνεται το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης στο οποίο η αποταμίευση, S_t, είναι ανάλογη του εθνικού εισοδήματος, Y_t, και οι επενδύσεις είναι ανάλογες στη μεταβολή του εισοδήματος από την περίοδο t στην $t+1$. Το υπόδειγμα για $t = 0, 1, 2, \ldots$ συνοψίζεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων.

$$S_t = aY_t \qquad (1)$$
$$I_{t+1} = b\,(Y_{t+1} - Y_t) \qquad (2)$$
$$S_t = I_t. \qquad (3)$$

όπου τα a και b είναι θετικές σταθερές, τέτοιες ώστε $0 < a \leq b$

Από την (1) και την (3) έπεται ότι

$$I_{t+1} = S_{t+1} = aY_{t+1}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2)

$$aY_{t+1} = b\,(Y_{t+1} - Y_t) \iff$$
$$aY_{t+1} = bY_{t+1} - bY_t \iff$$
$$bY_{t+1} - aY_{t+1} = bY_t \iff$$
$$(b-a)\,Y_{t+1} = bY_t \iff$$
$$Y_{t+1} = \frac{b}{b-a}\,Y_t$$

Προσθαφαιρώντας το a στον αριθμητή θα έχουμε

$$Y_{t+1} = \frac{b+a-a}{b-a}\,Y_t \iff$$

$$Y_{t+1} = \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)Y_t. \qquad (4)$$

Η εξίσωση διαφορών (4) θα έχει λύση

$$Y_t = \left(1 + \frac{a}{b-a}\right)^t Y_0$$

10.2 Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Έστω η μη ομογενής διαφορική εξίσωση

$$x_{t+1} = a x_t + b \quad , t = 0, 1, 2, \ldots$$

όπου a και b σταθερές. Όπως και στην περίπτωση της ομογενούς για κάποιο αρχικό x_0 θα έχουμε.

$$\begin{aligned} x_1 &= a x_0 + b \\ x_2 &= a x_1 + b = a(a x_0 + b) + b = \\ &= a^2 x_0 + (a+1) b \\ x_3 &= a x_2 + b = a(a^2 x_0 + (a+1)b) + b \\ &= a^3 x_0 + (a^2 + a + 1) b \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_t = a^t x_0 + (a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1) b$$

Η παρένθεση είναι το άθροισμα των όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου

$$(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1) = \sum_{j=1}^{t} a^{j-1} = \frac{1 - a^t}{1 - a} \quad , a \neq 1$$

Συνεπώς για $x_{t+1} = a x_t + b$

$$x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad , a \neq 1.$$

Αν $a = 1$: $1 + a + \ldots + a^{t-2} + a^{t-1} = t$ και επομένως

$x_t = x_0 + t b$ για $t = 0, 1, 2, \ldots$

Παράδειγμα 10.3 Να λυθούν οι εξισώσεις διαφορών:

(i) $x_{t+1} = \frac{1}{2} x_t + 3$

(ii) $x_{t+1} = -3x_t + 4$

Η διαφορική εξίσωση (i) είναι γραμμική πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές: $a = \frac{1}{2}$ και $b = 3$. Συνεπώς

$$x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t (x_0 - 6) + 6.$$

Ομοίως η εξίσωση διαφορών (ii) είναι γραμμική πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές: $a = -3$ και $b = 4$. Συνεπώς

$$x_t = (-3)^t (x_0 - 1) + 1$$

10.3 Γραμμικές Εξισώσεις διαφορών με μεταβλητούς συντελεστές

Αρχικά ας θεωρήσουμε την εξίσωση διαφορών

$$x_{t+1} = a x_t + b_t \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

όπου a σταθερά. Όπως και πριν για κάποιο x_0

$$x_1 = a x_0 + b_0$$

$$x_2 = a x_1 + b_1 = a(a x_0 + b_0) + b_1$$

$$a^2 x_0 + a b_0 + b_1$$

$$x_3 = a x_2 + b_2 = a(a^2 x_0 + a b_0 + b_1) = a^3 x_0 + a^2 b_0 + a b_1 + b_2.$$

κ.ο.κ. Σε αυτή την περίπτωση η λύση θα δίνεται ως

$$x_t = a^t x_0 + \sum_{j=1}^{t} a^{j-1} b_{j-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Αν ούτε το a είναι σταθερό θα έχουμε:

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t$$

Για κάποιο x_0:

$$x_1 = a_0 x_0 + b_0$$

$$x_2 = a_1 x_1 + b_1 = a_1(a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1$$

$$x_3 = a_2 x_2 + b_2 = a_2(a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2.$$

$$x_4 = a_3 x_3 + b_3 = a_3 a_2 a_1 a_0 x_0 + a_3 a_2 a_1 b_0 + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3.$$

κ.ο.κ. Γενικά

$$x_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1} a_j\right) x_0 + \left(\prod_{j=1}^{t-1} a_j\right) b_0 + \left(\prod_{j=2}^{t-1} a_j\right) b_1 + \left(\prod_{j=3}^{t-1} a_j\right) b_2 + \ldots + \left(\prod_{j=t-1}^{t-1} a_j\right) b_{t-2} + b_{t-1}$$

ή

$$x_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1} a_j\right) x_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \left(\prod_{j=s+1}^{t-1} a_j\right) b_s$$

Ορίζοντας $\prod_{s=t}^{t-1} a_s \equiv 1.$

Παράδειγμα 10.4. (Πληρωμές Στεγαστικών Δανείων) Μια οικογένεια λαμβάνει ένα στεγαστικό δάνειο ύψους K τη χρονική στιγμή $t=0$ με σταθερό επιτόκιο r ανά περίοδο (συνήθως ανά μήνα) Σε κάθε περίοδο η οικογένεια θα πληρώνει δόση ύψους a (σταθερή) έως ότου εξοφλήσει το δάνειο μετά από n περιόδους (π.χ. 360 μήνες = 30 χρόνια). Το ανεξόφλητο υπόλοιπο του δανείου b_t την περίοδο t ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών

$$b_{t+1} = (1+r)b_t - a \qquad (1)$$

με $b_0 = K$ και $b_n = 0$. Η εξίσωση διαφορών (1) είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές $(1+r)$ και $-a$, οπότε η γενική λύση της θα είναι

$$b_t = (1+r)^t \left(b_0 - \frac{a}{r}\right) + \frac{a}{r} \quad \Leftrightarrow$$

$$b_t = (1+r)^t \left(K - \frac{a}{r}\right) + \frac{a}{r} \qquad (2)$$

Για $t=n$ όμως $b_n = 0$. οπότε η (2) θα δίνει

$$0 = (1+r)^t \left(K - \frac{a}{r}\right) + \frac{a}{r}$$

Λύνοντας ως προς K θα πάρουμε

$$K = \frac{a}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right] = a\sum_{t=1}^{n}(1+r)^{-t}$$

Αποδεικνύεται επομένως ότι το δάνειο είναι ίσο με την παρούσα προεξοφλημένη αξία των n ισόποσων πληρωμών ύψους a για κάθε περίοδο. Λύνοντας για το a θα έχουμε

$$a = \frac{rK}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{rK(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

10.4 Εξισώσεις Διαφορών 2ης τάξης.

Η γενική μορφή μιας τυπικής εξίσωσης διαφορών δευτέρας τάξης είναι

$$x_{t+2} = f(t, x_t, x_{t+1}) \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Αν η f ορίζεται για κάθε τριάδα (t, x_t, x_{t+1}) και τα x_0 και x_1 είναι σταθερά, τότε για $t=0$ θα ισχύει ότι

$$x_2 = f(0, x_0, x_1)$$

Ομοίως για $t=1$

$$x_3 = f(1, x_1, x_2) = f(1, x_1, f(0, x_0, x_1))$$

κ.ο.κ. Συνεπώς για κάθε $t \geq 2$ μπορούμε να να υπολογίσουμε κάθε τιμή της x_t. Η λύση της εξίσωσης διαφορών, όπως και στην περίπτωση πρώτης τάξης προσδιορίζεται μοναδικά από τις αρχικές τιμές της x_t. Η διαφορά είναι ότι στις εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης χρειάζονται αρχικές τιμές για τις δύο πρώτες περιόδους. Εξ ορισμού η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης θα έχει τη μορφή

$$x_t = g(t; A, B)$$

όπου A και B δύο σταθερές που προσδιορίζονται μοναδικά δεδομένων των αρχικών τιμών x_0 και x_1.

Μια γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης θα έχει τη γενική μορφή

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t \qquad (1)$$

όπου a_t, b_t και c_t είναι κάποιες συναρτήσεις του t, ενώ θα πρέπει $b_t \neq 0$. Η ομογενής εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί στην (1) θα είναι

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0 \qquad (2)$$

Για τις εξισώσεις διαφορών (1) και (2) αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα που καθορίζει τις αντίστοιχες λύσεις τους.

Θεώρημα 10.1. (α) Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = 0$$

είναι $x_t = A u_t^{(1)} + B u_t^{(2)}$, όπου $u_t^{(1)}$ και $u_t^{(2)}$ είναι δύο μη ανάλογες λύσεις και A, B αυθαίρετες σταθερές.

(β) Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$x_{t+2} + a_t x_{t+1} + b_t x_t = c_t$$

είναι $x_t = A u_t^{(1)} + B u_t^{(2)} + u_t^{*}$, όπου $A u_t^{(1)} + B u_t^{(2)}$ είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών, και u_t^{*} μια ειδική λύση της μη ομογενούς.

Παρατήρηση 10.1 Για να εφαρμοστεί το παραπάνω θεώρημα θα πρέπει να βρούμε $u_t^{(1)}$ και $u_t^{(2)}$ που να μην είναι ανάλογες, δηλαδή θα πρέπει $u_t^{(1)}$ και $u_t^{(2)}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι

$u_t^{(1)}, u_t^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

10.5 Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με σταθερά Συντελεστές

Μια εξίσωση διαφορών 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές θα έχει τη μορφή

$$x_{t+2} + a x_{t+1} + b x_t = \gamma \qquad (1)$$

και η αντίστοιχη ομογενής

$$x_{t+2} + a x_{t+1} + b x_t = 0. \qquad (2)$$

Από την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λύση της ομογενούς θα είναι της μορφής λ^t. Αν $x_t = \lambda^t$ τότε $x_{t+1} = \lambda^{t+1}$ και $x_{t+2} = \lambda^{t+2}$. Αντικαθιστώντας στην (2) θα έχουμε

$$\lambda^{t+2} + a\lambda^{t+1} + b\lambda^t = 0 \iff$$

$$\lambda^t(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Δεδομένου ότι $\lambda \neq 0$ θα πρέπει

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (3)$$

Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα είναι

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

και η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (2) θα δίνεται ανά περίπτωση ως εξής (α) Αν $a^2 - 4b > 0$ (Η χαρακτηριστική εξίσωση (3) έχει δύο πραγματικές ρίζες)

$$x_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t$$

(β) Αν $a^2 - 4b = 0$ (Η χαρακτηριστική εξίσωση (3) έχει μια διπλή πραγματική ρίζα)

$$x_t = (A + Bt)\lambda^t$$

(γ) Αν $a^2 - 4b < 0$ (Η χαρακτηριστική εξίσωση (3) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες)

$$x_t = r^t (A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t))$$

όπου $r = \sqrt{b}$, $\cos\theta = -\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$, $\theta \in [0, \pi]$

Αν γνωρίζουμε τα x_0 και x_1, τότε σε κάθε περίπτωση (α)-(γ) μπορούμε να προσδιορίσουμε μοναδικά τα A και B. Για παράδειγμα στην περίπτωση (α), θα προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$x_0 = A + B$$
$$x_1 = A\lambda_1 + B\lambda_2$$

Παράδειγμα 10.5 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 0$$

Αρχικά βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία θα είναι

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

που έχει ρίζες $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Επομένως η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x_t = A 2^t + B \cdot 3^t$$

Για την περίπτωση της μη ομογενούς εξίσωσης διαφορών (1), από το θεώρημα 10.1 θα έχει τη μορφή

$$x_t = A u_t^{(1)} + B u_t^{(2)} + u_t^*$$

όπου $A u_t^{(1)} + B u_t^{(2)}$ είναι η γενική λύση της ομογενούς. Συνεπώς απομένει ο προσδιοριστός της ειδικής λύσης u_t^* της μη ομογενούς. Στην περίπτωση της (1) που το γ είναι σταθερό, αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$x_t = c$$

όπου c είναι μια σταθερά. Αντικαθιστώντας στην (1)

$$c + ac + bc = \gamma$$

Αν $(1+a+b) \neq 0$ τότε $c = \dfrac{\gamma}{1+a+b}$. Σε διαφορετική περίπτωση δεν υπάρχει $x_t = c$ που να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών (1).

Γενικότερα αν η εξίσωση διαφορών είναι της μορφής

$$x_{t+2} + a x_{t+1} + b x_t = \gamma_t \quad (4)$$

όπου το γ_t είναι γραμμικός συνδυασμός όρων όπως

$$a^t \,,\ t^m \,,\ \cos(qt) \ \text{ή} \ \sin(qt)$$

τότε μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών για την επίλυση της (4).

Παράδειγμα 10.6 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t + t^2 + 3.$$

Στο παράδειγμα 10.5 είδαμε ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$A \cdot 2^t + B \cdot 3^t$$

Επομένως αρκεί να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς. Υποθέτουμε ότι αυτή θα έχει τη μορφή

$$u_t^* = \Gamma \cdot 4^t + \Delta \cdot t^2 + E \cdot t + Z.$$

όπου Γ, Δ, Ε, Ζ σταθερές. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διαφορών θα έχουμε

$$\Gamma \cdot 4^{t+2} + \Delta (t+2)^2 + E \cdot (t+2) + Z - 5\left(\Gamma 4^{t+1} + \Delta (t+1)^2 + E(t+1) + Z\right) + 6\left(\Gamma 4^t + \Delta t^2 + Et + Z\right) = 4^t + t^2 + 3.$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$2\Gamma 4^t + 2\Delta t^2 + (-6\Delta + 2E)t + (-\Delta - 3E + 2Z) = 4^t + t^2 + 3.$$

Συνεπώς πρέπει

$$\left.\begin{aligned} 2\Gamma &= 1 \\ -6\Delta + 2E &= 0 \\ 2\Delta &= 1 \\ -\Delta - 3E + 2Z &= 3. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Gamma &= \tfrac{1}{2} \\ E &= 3/2 \\ \Delta &= \tfrac{1}{2} \\ Z &= 4. \end{aligned}$$

Τελικά η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι

$$x_t = A 2^t + B \cdot 3^t + \frac{1}{2} \cdot 4^t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t + 4.$$