Μέχρι τώρα μιλήσαμε για ΣΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών και για γραμμικές ΣΔΕ. (10)

Η επόμενη κατηγορία είναι η ακριβής ΔΕ με γενική μορφή

$$f(t,x) + g(t,x)\,\dot{x} = 0 \quad (1)$$

ή $$f(t,x)\,dt + g(t,x)\,dx = 0$$

Λύση της (1) είναι μια συνάρτηση $h(t,x)$

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = f(t,x) \quad κ' \quad \frac{\partial h(t,x)}{\partial x} = g(t,x)$$

τότε $(1) \Rightarrow \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = 0$

$$\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\cdot \dot{x} = f(t,x) + g(t,x)\dot{x} \right)$$

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας τέτοιας $h(t,x)$ είναι

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}$$

Αν ισχύει τότε η (1) λέγεται ακριβής.

(11)

και έχουμε $h(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(s,x)ds + \int_{x_0}^{x} g(t_0,s)ds$

Παράδειγμα: Να ~~[illegible]~~ εξετάσει αν η ΔΕ (1) είναι ακριβής

~~[illegible]~~

$$e^{-x} - (2x + te^{-x})\dot{x} = 0 \quad (1)$$

Έχουμε $f(x,t) = e^{-x}$

και $g(t,x) = -(2x + te^{-x})$

άρα $\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}$

$\frac{\partial g}{\partial t} = -e^{-x}$ $\Big\}$ ⇒ (1) ακριβής ΔΕ

12

ΔΕ Bernoulli: $\dot{X}(t) + \alpha(t) X(t) = \beta(t) X(t)^{r}$, $r \in \mathbb{R}$.

και $\alpha(t), \beta(t)$ πραγματικές συναρτήσεις

- Για $r=0 \to$ έχουμε γραμμική άρα την λύναμε όπως είδαμε
- Για $r=1$ έχουμε χωριζόμενων μεταβλητών
- Για $r \neq 1$ διαιρούμε με X^{r} και έχουμε

$$X^{-r}\dot{X} + \alpha(t) X^{1-r} = \beta(t)$$

- Έστω $Z = X^{1-r}$ τότε

έχουμε $\dfrac{\dot{Z}}{1-r} + \alpha(t) Z = \beta(t)$

$\downarrow$

γραμμική ΔΕ

(αφού $\dot{Z}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(X(t)^{1-r}\right) = (1-r) X(t)^{-r}\dot{X}(t)$.

Έχοντας μια λύση $Z(t)$

τότε $X(t) = Z(t)^{\frac{1}{1-r}}$

Παράδειγμα: Να λυθεί η ΔΕ $\dot{X}(t) = -tX(t) + t^{3}X(t)^{3}$

Λύση :

(13)

Έχουμε Bernoulli ΔΕ με $r=3$

Θέτουμε $z = x^{1-3} = x^{-2}$ και προκύπτει

$$-\frac{1}{2}\dot{z} = tz + t^3 \iff$$

$$\iff \dot{z} - 2tz = -2t^3$$

άρα έχουμε μια γραμμ. με γενική λύση

$$z(t) = ce^{t^2} - 2e^{t^2}\int t^3 e^{-t^2}\,dt$$

• Το $\int t^3 e^{-t^2}\,dt$ μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $u=-t^2$ ($du=-2t\,dt$)

και είναι ίσο με $\frac{1}{2}ue^u - \frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}t^2e^{-t^2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}$

άρα $z(t) = \pm z^{-1/2} = \pm\left(ce^{t^2} + t^2 + 1\right)^{-1/2}$

→ Ποιοτική Θεωρία κ' Ευστάθεια

• Για πολλές ΔΕ δεν δύναται να ευρεθεί η αναλυτική λύση τους.

• Συχνή μορφή ΔΕ στην οικονομική Θεωρία:

$$\dot{x} = F(x)$$

↳ αυτόνομες ΔΕ : η ανεξ. μεταβλητή t εισέρχεται στην εξίσωση μόνο μέσω της $x(t)$.

• Οι αυτόνομες ΔΕ είναι βολικό να μελετώνται **και** διαγραμματικά.

↳ Έστω $y=\dot{x}$ → δουλεύουμε με το διάγραμμα της $y=F(x)$ το οποίο ονομάζεται διάγραμμα φάσεως: κάθε ζεύγος $(x(t), \dot{x}(t))$ είναι σημείο της καμπύλης $y=F(x)$

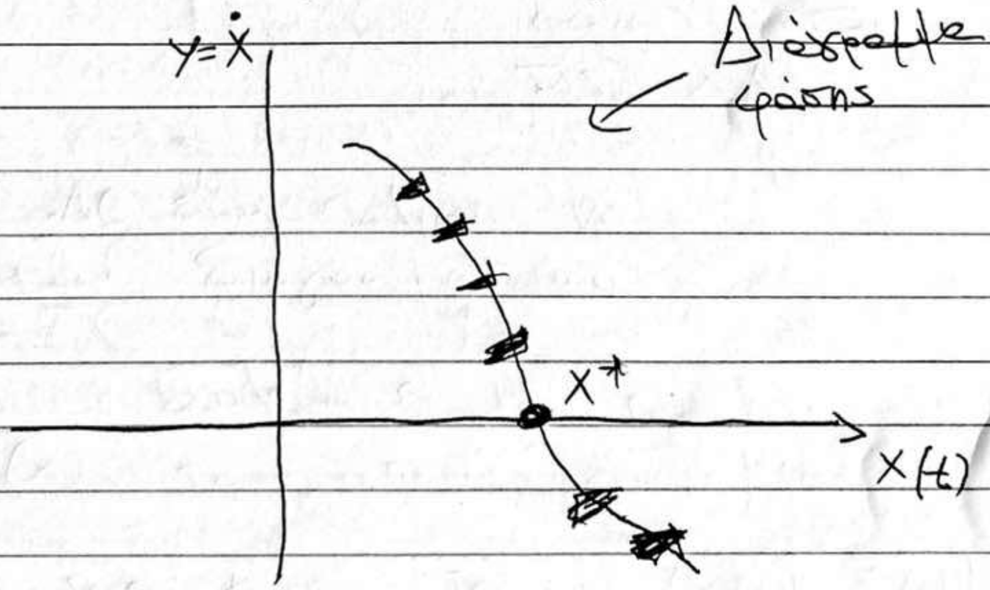
Παρατήρηση:

σημείο πάνω από τον $x'x$

• $F(x) > 0 \iff \dot{x} > 0$ άρα $\iff x(t)$ αύξουσα ως προς t

άρα καθώς το t αυξάνεται το $(x(t), \dot{x}(t))$ θα κινείται από αριστερά προς δεξιά.

• Ομοίως αν $F(x) < 0$ τότε $(x(t), \dot{x}(t))$ κινείται από δεξιά προς αριστερά.



• Κατάσταση Ισορροπίας της λύσης της ΔΕ (equilibrium or stationary state).

↳ Ένα x^* αντιπροσωπεύει σημείο ισορροπίας αν $F(x^*)=0$

Θεωρούμε αν ~~...~~ ~~...~~ με $x(t_0)=x_0$

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} x^* \quad \forall \ (t_0, x_0)$$

ασυμπτωτικά

Τότε η κατάσταση ισορροπίας λέγεται ευσταθής

• Για την $\dot{x}=F(x)$ αν x^* σημείο ισορροπίας τότε

↳ Αν $F(x^*)=0$ και $F'(x^*)<0$ τότε το x^* είναι ευσταθής ισορροπία

↳ Αν $F(x^*)=0$ και $F'(x^*)>0$ το x^{**} είναι ασταθής ισορροπία