Μέχρι τώρα λύσαμε για ΣΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών και για γραμμικές ΣΔΕ. (10)

Η επόμενη κατηγορία είναι η ακριβής ΔΕ με γενική μορφή

$$f(t,x) + g(t,x)\dot{x} = 0 \quad (1)$$

ή $$f(t,x)\,dt + g(t,x)\,dx = 0$$

Λύση της (1) είναι μια συνάρτηση $h(t,x)$

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = f(t,x) \quad κ' \quad \frac{\partial h(t,x)}{\partial x} = g(t,x)$$

τότε (1) $\Rightarrow \dfrac{\partial h(t,x)}{\partial t} = 0$

$$\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\cdot \dot{x} = f(t,x) + g(t,x)\dot{x} \right)$$

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μιας τέτοιας $h(t,x)$ είναι

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}$$

Αν ισχύει τότε η (1) λέγεται ακριβής. (4)

και έχουμε $h(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} g(t_0,s)\,ds$

Παράδειγμα: Να εξετάσει αν η ΔΕ (1) είναι ακριβής

$$e^{-x} - (2x + te^{-x})\dot{x} = 0 \quad (1)$$

Έχουμε $f(x,t) = e^{-x}$

και $g(t,x) = -(2x + te^{-x})$

άρα
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^{-x} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= -e^{-x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1) \text{ ακριβής ΔΕ}$$

ΔΕ Bernoulli: $\dot{X}(t) + a(t)X(t) = b(t)X(t)^r$, $r \in \mathbb{R}$.

και $a(t), b(t)$ πραγματικές συναρτήσεις

- Για $r=0$ → έχουμε γραμμική άρα την λύναμε όπως είδαμε
- Για $r=1$ έχουμε χωριζόμενων μεταβλητών
- Για $r \neq 1$ διαιρούμε με X^r και έχουμε

$$X^{-r}\dot{X} + a(t)X^{1-r} = b(t)$$

- Έστω $z = X^{1-r}$ τότε

έχουμε $\dfrac{\dot{z}}{1-r} + a(t)z = b(t)$

(αφού $\dot{z}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(X(t)^{1-r}\right) = (1-r)X(t)^{-r}\dot{X}(t)$.

↓

γραμμική ΔΕ

Έχοντας μια λύση $z(t)$

τότε $X(t) = z(t)^{\frac{1}{1-r}}$

Παράδειγμα: Να λυθεί η ΔΕ $\dot{X}(t) = -tX(t) + t^3X(t)^3$

Λύση:

(13)

Έχουμε Bernoulli ΔΕ ~~με~~ με $r=3$

Θέτουμε $z = x^{1-3} = x^{-2}$ και προκύπτει

$$-\frac{1}{2}\dot{z} = tz + t^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{z} - 2tz = -2t^3$$

άρα έχουμε μια γραμμ. με γενική λύση

$$z(t) = ce^{t^2} - 2e^{t^2}\int t^3 e^{-t^2}\,dt$$

• ~~θέ~~ Το $\int t^3 e^{-t^2} dt$ μπορεί να υπολογιστεί ~~με~~ θέτοντας $u = -t^2$ $(du = -2t\,dt)$

και είναι ίσο με $\frac{1}{2}ue^{u} - \frac{1}{2}e^{u} = -\frac{1}{2}t^2e^{-t^2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}$

άρα $z(t) = \pm z^{-1/2} = \pm\left(ce^{t^2} + t^2 + 1\right)^{-1/2}$