9. Διαφορικές Εξισώσεις

↳ Διαφορική εξίσωση: Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι συνάρτηση (αντί για αριθμός) και η εξίσωση περιλαμβάνει μία ή περισσότερες παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ): η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής

- Μερικές Διαφορικές εξισώσεις: Άγνωστη συνάρτηση πολλών μεταβλητών και η εξίσωση περιλαμβάνει μία ή περισσότερες μερικές παραγώγους

- Τάξη Διαφορικής εξίσωσης: η τάξη της ανώτερης παραγώγου. Π.χ. Πρώτης τάξης ΣΔΕ περιλαμβάνει συνάρτηση μιας μεταβλητής και μόνο πρώτης τάξης παράγωγο

Παράδειγμα:

$$\dot{x}(t) = x(t) + t$$

↳ $x(t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση
↳ t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή

(αν $f(x)$ ο συνηθισμένος συμβολισμός το ρόλο της f παίζει το x και του x το t!)

↳ $\dot{x}(t) = x'(t) = \dfrac{\partial x}{\partial t}$

Γενική μορφή ΣΔΕ πρώτης τάξης:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad (1)$$

↳ συνάρτηση δύο μεταβλητών

Λύση της (1) σε κάποιο διάστημα I των πραγματικών αριθμών ονομάζουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση φ τ.ω. η $x = \varphi(t)$ να ικανοποιεί την (1):

$$\dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t)).$$

Το γράφημα της λύσης λέγεται καμπύλη λύση ή ολοκληρωτική καμπύλη.

Παράδειγμα (Συνέχεια)

Για την $\dot{x} = x + t$ (1) μπορούμε α) ν.δ.ο

Η η $x(t) = -t-1$ και $x = e^{t} - t - 1$ είναι λύσεις

Πράγματι, με αντικατάσταση.

β) Η συνάρτηση $x(t) = ce^{t} - t - 1$, $c \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (1) με αντικατάσταση βλέπουμε ότι η (1) ικανοποι. $\forall t$

γ) Η $x(t) = e^{t} - 1$ δεν είναι λύση (με αντικατάσταση η (1) ικανοπ. μόνο για $t=1$).

άρα μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις.

- Το σύνολο των λύσεων $x(t) = ce^{t} - 1$ λέγεται γενική λύση ενώ για συγκεκριμένη επιλογή π.χ. $c=2$ έχουμε την ειδική λύση.

Παράδειγμα (Συνέχεια).

Έστω $\dot{X} = X + t$ και ψάχναμε την λύση που περνάει από το σημείο $(0, 1)$

τότε $X(t) = ce^{t} - t - 1$

και $X(0) = 1 \Leftrightarrow ce^{0} - 0 - 1 = 1$

~~$\Leftrightarrow c e^{0}$~~ $\Leftrightarrow \boxed{c = 2}$

άρα η λύση που ψάχναμε είναι η
$X(t) = -2e^{t} - t - 1.$

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Παρατήρηση: Τέτοια προβλήματα συναντιώνται συχνά στην οικονομική κατεύθυνση όπου ΣΔΕ μοντελοποιούν τη συσσώρευση κεφαλαίου διαχρονικά.
Αρχική τιμή: αρχικό απόθεμα κεφαλαίου

• ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών:

↳ Μορφή $\dot{x}(t) = f(t)g(x)$

Παράδειγμα: Η $\dot{x} = x + t$ δεν είναι διαχωρίσιμη
ενώ η $\dot{x} = -2tx^2$ είναι με $f(t) = -2t$ και
$g(x) = x^2$.

Λύση ΣΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών:

Βήμα 1: (χωρισμός μεταβλητών) Έχουμε $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

Βήμα 2: (ολοκλήρωση):

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

Βήμα 3: Υπολογισμός ολοκληρωμάτων και εξαγωγή της μορφής της x όπου είναι δυνατόν.

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η ΣΔΕ: $\dot{x} = -2tx^2$

$$\frac{dx}{x^2} = -2t\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int -\frac{dx}{x^2} = \int 2t\,dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = t^2 + c \quad \text{άρα}$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2+c}$$

• Αν έχουμε αρχική συνθήκη $(t,x) = (1,-1)$

Τότε $\boxed{c=-2}$

<u>Παράδειγμα</u> 2: Να λυθεί $\dot{x} = \dfrac{t^3}{x^6+1}$

↳ διαχωρίσιμη με $f(t) = t^3$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^6+1}$

Επειδή $g(x) \neq 0$, $c=0$ → όχι σταθερές λύσεις

$\dfrac{x^7}{7} + x = \dfrac{t^4}{4}$ → όχι αναλυτική λύση της x αλλά έχουμε εξίσωση χωρίς παραγώγους.

Παράδειγμα 3: (Συνεχής Ανατοκισμός)

Έστω $p(t) > 0$ το ύψος του κεφαλαίου σε χρημ. μονάδες που έχει τοποθετηθεί σε μια επένδυση την χρον. στιγμή t και $r(t)$ το επιτόκιο. Έστω ότι για την επένδυση υπάρχει συνεχής ανατοκισμός σύμφωνα με την σχέση

$$\dot{p}(t) = r(t)p(t) \quad (1)$$

Η (1) είναι διαχωρίσιμη και ισχύει

$$\int \frac{\partial p}{p(t)} = \int r(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|p| = R(t) + c$$

$$\Leftrightarrow \ln p = R(t) + c$$

$$\Leftrightarrow p(t) = e^{R(t)} e^{c} = C_0 e^{R(t)}$$

όπου $R(t) = \int r(t)dt$ και $C_0 = e^{c}$. Αν ξέρουμε κάποια αρχική τιμή $p(0)$ τότε

$$C = p(0)e^{-R(0)}$$

και επομένως $p(t) = p(0)e^{R(t) - R(0)} =$

$$= p(0)e^{\int_0^t r(s)ds}$$

→ Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

• Μια ΣΔΕ λέγεται γραμμική αν έχει τη μορφή

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad (1)$$

όπου $a(t)$ και $b(t)$ συνεχείς συναρτήσεις του t σε κάποιο διάστημα I.

Παραδείγματα: i) $\dot{x}(t) = 3t - 6t x(t)$
ii) $t^2 \dot{x}(t) + e^{2t} x(t) = t(\ln t - 1)$

• Η πιο απλή γραμμική ΣΔΕ είναι για $a(t) = a$ και $b(t) = b$

Δηλαδή $\dot{x}(t) + a x(t) = b$

Τότε $e^{at}\dot{x}(t) + a e^{at} x(t) = b e^{at}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(x(t)e^{at}\right) = b e^{at}$$

άρα $\int \partial(x e^{at}) = \int b e^{at} \partial t$

$$x e^{at} = \frac{b}{a} e^{at} + C$$

$$\Leftrightarrow x(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}, \text{ για } C = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{b}{a}$$

8*

• Γραμμικές ΔΕ : αν $\beta(t)=0$

η (1) λέγεται ομογενής και είναι χωριζόμενων μεταβλητών και δουλεύοντας όπως πριν καταλήγουμε στην γενική λύση

$$x(t) = c\,e^{-\int a(t)dt}$$

~~αρα~~

↳ Αν $a(t)$, $\beta(t)$ γενικές συναρτήσεις τότε η γενική λύση δίνεται ως $x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int \beta(t)e^{\int a(t)dt}dt + c\right)$

Παράδειγμα: Να λυθεί

$$\dot{x} \underbrace{-t}_{a(t)} x = \underbrace{te^{t^2}}_{\beta(t)}$$

~~άρα~~ και $\int -t\,dt = -\frac{t^2}{2}$

άρα $x(t) = e^{t^2/2}\left(\int \underbrace{te^{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}}_{=\,e^{t^2/2}}dt + c\right)$

Προσδιορίζεται αν έχουμε αρχικές τιμές.

Η $x(t)=\frac{b}{a}$ αναφέρεται κατάσταση ισορροπίας ή στάσιμη κατάσταση αφού προκύπτει ως λύση της $\dot{x}(t)=0$
(δηλ. ρυθμός μεταβ. $=0$)

· Επίσης για $a>0$ η λύση λέγεται ευσταθής αφού
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(ce^{-at}+\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$$

· Γραμμ. ΔΕ με σταθερό $a(t)$

Τότε δουλεύουμε παρομοίως

$$x(t)e^{at} = \int e^{at}b(t)+c$$

ή $x(t) = ce^{-at}+e^{-at}\int e^{at}b(t)dt$

(Εφαρμογή: Μοντέλο οικονομικής μεγέθυνσης)