Σχόλια στις έννοιες Ιδιοτιμών κ' Ιδιοδιανυσμάτων - Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση Συμμετρικών Πινάκων

eigenvector

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τότε το $x \in \mathbb{F}^{\nu}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A αν ικανοποιείται το γραμμικό σύστημα

$$Ax = \lambda x \quad , \lambda \in \mathbb{F}$$

και λ τ.ω. $\det(A - \lambda I) = 0$ (eigenvalue)
ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A.

- Από τον ορισμό των οριζουσών έχουμε ότι το $\det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού ως προς λ. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του $\det(A - \lambda I)$ το οποίο ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 16 = 0 \iff$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \iff \lambda_1 = 5 \;, \lambda_2 = -3$$

Ιδιοδιανύσματα: $\cdot \ (A - 5I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$x_1 = x_2$ δηλ. το ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 5$ είναι της μορφής $x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$

Αντίστοιχα για $\lambda_2 = -3$ έχουμε $(A+3I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$ άρα το ιδιοδιάνυσμα είναι

της μορφής $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$

Παρατηρήσεις – Ιδιότητες:

- Το $\det(A-\lambda I)$ έχει πάντα ν ρίζες στους μιγαδικούς αριθμούς κ΄ κάποιες από αυτές να είναι πολλαπλές.

- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή λ συγκροτούν υπόχωρο του $\mathbb{R}^\nu$ ο οποίος λέμε ότι αντιστοιχεί στην λ. Αυτός ονομάζεται ιδιόχωρος (eigenspace) που αντιστοιχεί στη λ.

- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow rank(A) = \nu \Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι διάφορες του $0 \Leftrightarrow$ το σύνολο των στηλών του A είναι βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

- Αν A διαγώνιος τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

→ Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση Συμμετρικού Πίνακα (3)

• Αν $A \in F^{\nu \times \nu}$ συμμετρικός τότε έχει ν πραγματικές ιδιοτιμές. Τότε μπορούν να επιλεγούν ν ιδιοδιανύσματα τ.ω. να αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο.

• Αν P ο πίνακας που έχει ως στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα διατεταγμένα σύμφωνα με τις ιδιοτιμές του A τότε

$$P = P^{-1}$$

και αν Λ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A τότε

$$\underbrace{A = P^{-1} \Lambda P = P' \Lambda P}_{\text{ορθογώνια διαγωνοποίηση της } A}$$

• Παράδειγμα: Στο παραπάνω όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ θα έχουμε $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ και τα ιδιοδιανύσματα

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους

αλλά όχι κανονικά.

(4)

Τα κανονικοποιούμε διαιρώντας με το μήκος τους

δηλαδή αν $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $\|V_1\| = \sqrt{2}$

και $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $\|V_2\| = \sqrt{2}$

άρα έχουμε τα ορθοκανονικά

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

άρα $$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P'}$$

- Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση - Δυνάμεις κ' εκθετικά

↳ Παρατηρήστε ότι $A^2 = AA = (P'\Lambda P)(P'\Lambda P) =$

$$= P'\Lambda \underbrace{(PP')}_{I} \Lambda P =$$
$$= P'\Lambda^2 P$$

Γενικά $A^k = P'\Lambda^k P$

άρα αν έχουμε τα P και Λ

μπορούμε εύκολα να βρούμε A^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $e^A = P'e^\Lambda P$.