7. Ιδιοτιμές και Διαγωνισιμότητα.

Έχουμε δει ότι σε ένα διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$, αν $f:V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε για κάθε διατεταγμένη βάση $\hat{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ του V αντιστοιχεί ένας πίνακας $(f:\hat{a},\hat{a})$ ο οποίος καθορίζει την f, και οι ιδιότητες της f μπορούν να μελετηθούν μέσω του πίνακα $(f:\hat{a},\hat{a})$. Π.χ. η διάσταση της εικόνας της f είναι ίση με την τάξη του πίνακα $(f:\hat{a},\hat{a})$. Θα μας διευκόλυνε αν η διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ ήταν τέτοια ώστε ο αντίστοιχος πίνακας $(f:\hat{a},\hat{a})$ να απλοποιεί τους υπολογισμούς. Τέτοιας μορφής πίνακες είναι οι διαγώνιοι.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Αν ο πίνακας της f είναι διαγώνιος, τότε η διάσταση της $\operatorname{Im} f$ είναι το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων που βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο του $(f:\hat{a},\hat{a})$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο $(f:\hat{a},\hat{a})$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$

$$f(a_i) = \lambda_i a_i$$

Συνεπώς ο χώρος $\operatorname{Im} f$ παράγεται από τα a_i για τα οποία $\lambda_i a_i \neq 0$, ενώ ο $\operatorname{Ker} f$ από τα

a_i για τα οποία $\lambda_i a_i = 0$.

Ορισμός 7.1 Έστω $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου V είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ λέγεται ιδιοτιμή της f αν υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ τέτοιο ώστε

$$f(v) = \lambda v.$$

Τότε θα λέμε ότι το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παρατήρηση 7.1 Αν η $f: V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση στον V και $\hat{a}$, $\hat{b}$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του V τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$(f: \hat{b}, \hat{b}) = P^{-1}(f: \hat{a}, \hat{a}) P$$

Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο $(1_V: \hat{b}, \hat{a})$, ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{b}$ στην $\hat{a}$.

Παράδειγμα 7.1 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y) = (3x + y, 2x + 4y)$$

Αν $\hat{a} = \{(1,0), (0,1)\}$ και $\hat{b} = \{(1,1), (1,-1)\}$

τότε

$$f(1,0) = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1)$$
$$f(0,1) = (1,4) = 1(1,0) + 4(0,1)$$

Ομοίως
$$f(1,1) = (4,6) = 5(1,1) + (-1)(1,-1)$$
$$f(1,-1) = (2,-2) = 0.(1,1) + 2(1,-1)$$

Συνεπώς
$$(f:\hat{a},\hat{a}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$(f:\hat{b},\hat{b}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας την ταυτοτική απεικόνιση στον $\mathbb{R}^2$:
$1_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $1_{\mathbb{R}^2}(x,y) = (x,y)$

$$1_{\mathbb{R}^2}(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

$$1_{\mathbb{R}^2}(1,-1) = 1(1,0) + (-1)(0,1)$$

$$(1_{\mathbb{R}^2}: \hat{b},\hat{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Επομένως:}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Πρόταση 7.1 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$, $\hat{a}$ μια διατεταγμένη βάση του και $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $A = (f:\hat{a},\hat{a})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το λ είναι μια ιδιοτιμή της f

(2) $\det(A - \lambda I) = 0$

7.1 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα πινάκων.

Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και τη γραμμική απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1} \quad \text{με} \quad \gamma_A(x) = Ax$$

Αν ένα $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή της γ_A και $x \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ τότε

$$Ax = \lambda x$$

Ορισμός 7.2 Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $x \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ με $x \neq \mathbb{O}$ τέτοια ώστε $Ax = \lambda x$, τότε το λ θα λέγεται ιδιοτιμή του πίνακα A και το x θα λέγεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A. που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Πρόταση 7.2 Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Το λ είναι ιδιοτιμή του A

(2) Υπάρχει $x \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$, $x \neq \mathbb{O}$, τέτοιο ώστε

$$(A - \lambda I)x = \mathbb{O}$$

(3) $\det(A - \lambda I) = 0$.

<u>Απόδειξη</u> Παραλείπεται.

Παράδειγμα 7.2

(α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Οι ιδιοτιμές του A θα ικανοποιούν $\det(A-\lambda I)=0$

Συνεπώς

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-(-2)$$

$$= -(\lambda-1)\left[-(\lambda+1)\right] + 2 = (\lambda-1)(\lambda+1)+2$$

$$= \lambda^2 - 1^2 + 2 = \lambda^2+1.$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=-1. \qquad (1)$$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.

(β) Αν $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, η εξίσωση (1) θα έχει δύο λύσεις $\lambda = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow \lambda=\pm i$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα θα λύσουμε την εξίσωση (σύστημα) $A\underset{\sim}{x}-\lambda\underset{\sim}{x}=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)\underset{\sim}{x}=0$.

Έστω $x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ τότε για $\lambda=i$ θα έχουμε

$$(A-\lambda I)\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(1-i)x - y = 0$$
$$2x - (1+i)y = 0$$

που έχει λύσεις $\begin{pmatrix} x \\ (1-i)x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Αντίστοιχα για $\lambda=-i$

$$(A-\lambda I)x=0 \iff \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$(i+1)x - y = 0$$
$$2x + (i-1)y = 0$$

που έχει λύσεις τα $\begin{pmatrix} x \\ (i+1)x \end{pmatrix}$ όπου $x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(γ) Έστω $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff (2-\lambda)^2(3-\lambda)=0 \qquad (2)$$

Η (2) έχει δύο λύσεις $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$.

Για $\lambda_1=2$

$$(A-\lambda I)x=0 \iff \begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από το οποίο προκύπτει το σύστημα.

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ -y-z &= 0 \\ 2y+2z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ y+z &= 0. \end{aligned}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι οι $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, με

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Για $\lambda_2 = 3$, το αντίστοιχο σύστημα θα είναι

$$\left.\begin{aligned} -x+y &= 0 \\ -2y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x-y &= 0 \\ 2y+z &= 0. \end{aligned}$$

Το σύστημα έχει λύσεις τις $\begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_2 = 3$ θα είναι το

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ορισμός Ι.3. Για κάποιο πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ το πολυώνυμο $\det(A - xI)$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και συμβολίζεται με $\chi_A(x)$

Από τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Παρατήρηση 7.2 Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$, με ν περιττό αριθμό. Τότε το $\chi_A(x)$ είναι περιττού βαθμού, έχει συντελεστές από το $\mathbb{R}$ και έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Πρόταση 7.3 Ιδιότητες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^t

(β) Αν ο A είναι τριγωνικός τότε

$$\chi_A(x) = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\dots(a_{\nu\nu}-x)$$

(γ) Αν ο A γράφεται στη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & A_k \end{pmatrix}$$

όπου $A_i \in \mathbb{F}^{\nu_i\times\nu_i}$ και $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k=\nu$, τότε

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\cdot\chi_{A_2}(x)\dots\chi_{A_k}(x)$$

<u>Απόδειξη</u> Παραλείπεται

Παράδειγμα 7.3 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 2 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

δηλαδή $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Από το (γ) της

πρότασης f.3 ισχύει ότι $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) \cdot \chi_{A_2}(x)$

$\chi_{A_1}(x) = \det(A_1 - xI) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1$

$= x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$\chi_{A_2}(x) = \det(A_2 - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -2 & 4-x \end{pmatrix} = (1-x)(4-x) + 2$

$= x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Άρα $\chi_A(x) = (x-1)(x-3)(x-2)(x-3) =$
$(x-1)(x-2)(x-3)^2$

Ρίζες του $\chi_A(x)$ είναι οι $1, 2, 3$ και αυτές είναι και οι ιδιοτιμές του A.

Ορισμός f.4 Ίχνος ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων του A που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ii}$$

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ με

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{pmatrix} =$$

$$x^2 - (a_{11}+a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $\chi_A(x)$ είναι η ορίζουσα του A. Επίσης ο συντελεστής του x είναι $-Tr(A)$. Γενικά ισχύει ότι:

Πρόταση 7.4. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_0$. Τότε

$$a_0 = \det(A) \quad \text{και} \quad a_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} Tr(A)$$

<u>Απόδειξη</u> Ισχύει ότι $a_0 = \chi_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$.

Αν $A = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$ τότε πρέπει

$$\chi_A(x) = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\dots(a_{\nu\nu}-x) + b(x) \quad (1)$$

όπου $b(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $\nu-2$. Μας ενδιαφέρουν οι συντελεστές του $x^{\nu-1}$ που πρέπει να είναι $a_{\nu-1}$ και $(-1)^{\nu-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{\nu\nu})$
$a_{\nu-1}$ είναι ο συντελεστής του $x^{\nu-1}$ στο $\chi_A(x)$ εξ.(1)
Στο δεξιό μέλος ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $(-1)^{\nu-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{\nu\nu}) = (-1)^{\nu-1}Tr(A)$

Οπότε από την ισότητα πολυωνύμων θα πρέπει

$$a_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} Tr(A).$$

Πόρισμα 7.1 Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_\nu$$

<u>Απόδειξη</u> Για ένα πολυώνυμο $p(x)$ ν βαθμού είναι γνωστό ότι έχει ακριβώς ν ρίζες στο $\mathbb{C}$. (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες). Αν $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ Τότε το $\chi_A(x)$ έχει ν ρίζες στο $\mathbb{C}$. Επομένως αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ είναι οι ρίζες του $\chi_A(x)$ (ή οι ιδιοτιμές του A) τότε

$$\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_\nu)$$

και επομένως $\chi_A(0) = (-1)^\nu (-1)^\nu \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu =$
$= (-1)^{2\nu} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu$
$= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu.$

Όμως από την πρόταση 7.4 έχουμε ότι $\chi_A(0) = a_0 = \det(A)$.

Πόρισμα 7.2 Έστω $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ οι ιδιοτιμές του. Τότε

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu.$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_\nu)$
$= (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_0.$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του $x^{\nu-1}$ θα έχουμε $a_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu)$. Από το πόρισμα 7.4 όμως $a_{\nu-1} = Tr(A) \cdot (-1)^{\nu-1}$ Συνεπώς

$$(-1)^{\nu-1} Tr(A) = (-1)^{\nu-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu) \Leftrightarrow$$

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu$$

7.2 Διαγωνίσιμες Γραμμικές Απεικονίσεις & Πίνακες

Ορισμός 7.5 Έστω $f: V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση στο διανυσματικό χώρο V. Αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V τέτοια ώστε ο πίνακας $(f: \hat{a}, \hat{a})$ να είναι διαγώνιος, θα λέμε ότι η f είναι διαγωνίσιμη.

Παράδειγμα 7.4. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$$

Ο πίνακας της f ως προς την διατεταγμένη βάση $\hat{a} = \{(1,-1),(2,3)\}$ του $\mathbb{R}^2$ θα είναι:

$$(f: \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

καθώς

$$f(1,-1) = (-1,1) = (-1)(1,-1) + 0 \cdot (2,3)$$
$$f(2,3) = (8,12) = 0 \cdot (1,-1) + 4(2,3)$$

Αντιθέτως ως προς την κανονική βάση $\hat{e} = \{(1,0),(0,1)\}$ ο πίνακας της απεικόνισης f ως προς την $\hat{e}$ θα είναι

$$(f:\hat{e},\hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ καθώς}$$

$$f(1,0) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$$
$$f(0,1) = (2,2) = 2\cdot(1,0) + 2\cdot(0,1)$$

Η f είναι διαγωνίσιμη αφού υπάρχει διατεταγμένη βάση (η $\hat{a}$) ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι διαγώνιος.

Πρόταση 7.5 Μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f.

__Απόδειξη__ Έστω ότι η f είναι διαγωνίσιμη. Από τον ορισμό 7.5 υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του διανυσματικού χώρου V τέτοια ώστε ο πίνακας $(f:\hat{a},\hat{a})$ να είναι διαγώνιος. Αν

$$(f:\hat{a},\hat{a}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{τότε } \forall i=1,\dots,n$$

θα έχουμε $f(a_i) = \lambda_i a_i$. Δηλαδή τα στοιχεία της βάσης $\hat{a}$ είναι ιδιοδιανύσματα της f.
Αντίστροφα, αν $\hat{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ είναι μια διατεταγμένη βάση της f, τότε υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}$ με

$$f(a_i) = \lambda_i a_i \quad \forall i=1,\dots,n$$

Επομένως ο πίνακας $(f:\hat{a},\hat{a})$ είναι διαγώνιος και έχει τη μορφή

$$(f:\hat{a},\hat{a}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ορισμός 7.6. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ονομάζεται διαγωνίσιμος αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα 7.5. Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο A είναι διαγωνίσιμος αφού

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Αντιθέτως ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$ δεν είναι διαγωνίσιμος, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{2\times2}$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P = I$$

Όμως $PIP^{-1} = I$ οπότε θα έπρεπε $B = I$, που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 7.3 Ισχύει ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ και διατεταγμένες βάσεις $\hat{a}$ και $\hat{b}$ του V τέτοιες ώστε $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ και $B = (f : \hat{b}, \hat{b})$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν ο A είναι πίνακας μιας διαγωνίσιμης γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$.

Πρόταση 7.6 Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι ο A είναι διαγωνίσιμος. Υπάρχει P αντιστρέψιμος, τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, όπου $\Delta \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγώνιος. Θα πρέπει

$$AP = P\Delta.$$

Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} p_{jk} = p_{ik}\lambda_k \quad \forall i, k = 1, \ldots, \nu$$

όπου $A = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$, $P = (p_{ij})_{\nu\times\nu}$ και

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\nu \end{bmatrix}$$

Αν P_k η k-στήλη του P, δηλαδή

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ \vdots \\ p_{\nu k} \end{bmatrix}$$

Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος $P_k \neq \mathbb{O}$ και επομένως

$$AP_k = \lambda_k P_k \quad \forall k = 1, \ldots, \nu.$$

Δηλαδή το AP_k είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A. Επειδή ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος τα P_k για $k=1,\ldots,\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού $\dim \mathbb{F}^{\nu\times 1} = \nu$ το σύνολο $\{P_1, P_2, \ldots, P_\nu\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$.
Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ του A. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ έτσι ώστε

$$AP_k = \lambda_k P_k$$

Αν P ο πίνακας με k-στήλη την P_k, $k=1,\ldots,\nu$. Τότε ο P είναι αντιστρέψιμος. Οπότε

$$AP = P\Delta \Leftrightarrow P^{-1}AP = \Delta.$$

συνεπώς ο A είναι διαγωνίσιμος.

Παράδειγμα 7.6 (α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 5$. και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Συνεπώς ο A είναι διαγωνίσιμος και θα έχουμε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(β) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ δεν είναι διαγωνίσιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι

$$u_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \\ -2x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Προφανώς δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ που να αποτελείται από τέτοια στοιχεία.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Cayley-Hamilton) Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Αν $\chi_A(x)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Τότε $\chi_A(A) = 0$.