3. Γραμμικές Απεικονίσεις.

Για τη μελέτη και τη σύγκριση δύο διανυσματικών χώρων χρησιμοποιούμε γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 3.1 Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$. Μια απεικόνιση $f: V \to W$ ονομάζεται γραμμική απεικόνιση αν:

(α) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in V$

(β) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{F}$ και $\forall\, x \in V$.

Στον ορισμό 3.1 το σύμβολο "+" στο αριστερό μέλος της ιδιότητας (α) συμβολίζει την πρόσθεση στο διανυσματικό χώρο V, ενώ αντίστοιχα "+" στο δεξιό μέλος της ιδιότητας (α) συμβολίζει την πρόσθεση στο διανυσματικό χώρο W.

Παράδειγμα 3.1 α) Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y) = (0, y)$$

είναι γραμμική απεικόνιση

β) Η απεικόνιση $d: \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_\nu[x]$ με

$$d(p(x)) = p'(x)$$

είναι γραμμική απεικόνιση που προκύπτει από τις ιδιότητες των παραγώγων.

γ) Η απεικόνιση $t: \mathbb{R}^{\mu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ με

$$A \longrightarrow A^{+} \text{ (ή } A'\text{)}$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

δ) Αν V και W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ τότε η απεικόνιση $V \longrightarrow W$ με $x \longmapsto O_W$ $\forall x \in V$ και O_W το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου W είναι γραμμική απεικόνιση και συμβολίζεται με $O_{V,W}$

ε) Αν V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ τότε η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \longrightarrow V$ με $x \longmapsto x$ είναι γραμμική απεικόνιση.

Πρόταση 3.1 Μια απεικόνιση $f : V \to W$ είναι γραμμική αν και μόνο αν $f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$ για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$.

<u>Απόδειξη</u> Για $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ τότε έχουμε την ιδιότητα (α) του ορισμού 2.1. Επιπλέον αν $\lambda_2 = 0$ τότε έχουμε την ιδιότητα (β).
Αντιστρόφως αν f είναι γραμμική, για $x, y \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ τότε έχουμε

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = f(\lambda_1 x) + f(\lambda_2 y) =$$

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$$

Σημειώνεται ότι επαγωγικά από την πρόταση 3.1 μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων V και W και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$.

τότε

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k) = \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ldots+\lambda_k f(x_k)$$

Πρόταση 3.2 Έστω $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε ισχύουν
(α) $f(0_V) = 0_W$
(β) $\forall x \in V$ έχουμε $f(-x) = -f(x)$

<u>Απόδειξη</u> Από τη δεύτερη ιδιότητα του ορισμού 2.1 για $\lambda = 0_F$

$$f(0_V) = f(0_F \cdot 0_V) = 0_F \cdot f(0_V) = 0_W$$
(β) $f(-x) = f(-1_F\, x) = -1_F f(x) = -f(x)$

Ορισμός 3.2 Έστω V και W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to W$ γραμμική απεικόνιση
(α) Αν η f είναι 1-1 τότε η γραμμική απεικόνιση f λέγεται μονομορφισμός.
(β) Αν η f είναι επί $(f(V) = W)$, τότε η γραμμική απεικόνιση f λέγεται επιμορφισμός.
(γ) Αν η f είναι 1-1 και επί (μονομορφισμός και επιμορφισμός), τότε θα λέγεται ισομορφισμός.

Παράδειγμα 3.2 Από το παράδειγμα 3.1. η απεικόνιση του (α) είναι μονομορφισμός.
Το (β) δεν είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός.
Επίσης:
(α) Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ με

$$f(x) = a\,x \quad \text{για κάποιο } a \in \mathbb{R}$$

είναι γραμμική απεικόνιση που είναι 1-1 και επί, είναι δηλαδή ισομορφισμός.

(β) Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $I: \mathbb{R}_v[x] \to \mathbb{R}$ με

$$I(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$$

Η απεικόνιση είναι γραμμική και είναι επί, όχι όμως και 1-1. Συνεπώς είναι επιμορφισμός.

Παρατήρηση 3.1 Αν μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1 και επί, τότε ορίζεται η αντίστροφή της. Δηλαδή αν

$$f: V \to W$$

τότε $f^{-1}: W \to V$ που είναι επίσης γραμμική απεικόνιση που είναι επίσης 1-1 και επί.

Έστω $y_1, y_2 \in W$. Θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in V$ τέτοια ώστε

$$f^{-1}(y_1) = x_1 \quad \text{και} \quad f^{-1}(y_2) = x_2$$

Από τον ορισμό της f συνεπάγεται ότι

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{και} \quad f(x_2) = y_2$$

Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$$

Από τον ορισμό της f^{-1} έπεται ότι

$$f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$$

Ανάλογα για $\lambda \in \mathbb{F}$ και $y \in W$ τότε

$$f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$$

οπότε και η f^{-1} είναι γραμμική.
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν η f είναι ισομορφισμός, τότε και η f^{-1} είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 3.3 Έστω διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$. Αν υπάρχει $f: V \to W$ ισομορφισμός, τότε οι V και W λέγονται ισόμορφοι και γράφουμε $V \simeq W$

Δύο ισόμορφοι διανυσματικοί χώροι που είναι ισόμορφοι, τότε ως διανυσματικοί χώροι θα έχουν την ίδια δομή. Κάθε ιδιότητα του ενός (που αφορά στη δομή του) μεταφέρεται μέσω του ισομορφισμού σε αντίστοιχη ιδιότητα του άλλου.

Παράδειγμα 3.3 (α) Έστω $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Η f είναι γραμμική απεικόνιση η οποία είναι 1-1 και επί (ισομορφισμός) και επομένως $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^{2\times 2}$

(β) Έστω η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2 + x_3)$$

Η f είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι έστω $x = (x_1, x_2, x_3)$ και $z = (z_1, z_2, z_3)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

τότε $\lambda_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2(z_1, z_2, z_3) = \lambda_2 \underset{\sim}{z} + \lambda_1 \underset{\sim}{x}$

$$f(\lambda_1 \underset{\sim}{x} + \lambda_2 \underset{\sim}{z}) = f[(\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_2, \lambda_1 x_3) + (\lambda_2 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_2 z_3)]$$

$$= f[(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 z_1, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 z_2, \lambda_1 x_3 + \lambda_2 z_3)]$$

$$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 z_1, \lambda_1(x_2 + x_3) + \lambda_2(z_2 + z_3))$$

$$= \lambda_1(x_1, x_2 + x_3) + \lambda_2(z_1, z_2 + z_3)$$

$$= \lambda_1 f(\underset{\sim}{x}) + \lambda_2 f(\underset{\sim}{z})$$

Από την πρόταση 3.1 η f είναι γραμμική απεικόνιση. Η f είναι επί: Αν $\underset{\sim}{w} \in \mathbb{R}^2$ με $\underset{\sim}{w} = (w_1, w_2)$ τότε $f((w_1, 0, w_2)) = w$. Η f ωστόσο δεν είναι 1-1 καθώς:

$$f((4, 0, 1)) = (4, 1)$$

$$f((4, 2, -1)) = (4, 1)$$

Θεώρημα 3.1. Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση και $k \in \mathbb{N}$.

(α) αν $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ γραμμικά εξαρτημένα τότε

$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του W.

(β) αν η f είναι 1-1 και $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε

$f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητα στοιχεία του W.

(γ) Αν η f είναι επί και $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, τότε

$$W = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k) \rangle$$

(δ) Αν η f είναι ισομορφισμός, τότε το $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ είναι βάση του V αν και μόνο αν $\{f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_k)\}$ είναι μια βάση του W.

Απόδειξη (α) Επειδή $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0_V$. Συνεπώς

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = f(0_V) = 0_W.$$

Όμως

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k) = 0_W.$$

Επειδή τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ δεν είναι όλα μηδέν έπεται ότι $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(β) Έστω $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k) = 0_W$. Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k) = 0_W = f(0_V)$$

Συνεπώς $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0_V$.

Τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επομένως $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0_{\mathbb{F}}$. Άρα και τα $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(γ) Έστω $w \in W$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε $f(u) = w$. Επειδή $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ με

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$$

$$f(u) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k)$$

Όμως $f(u) = w \Rightarrow$

$$w = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k)$$

Το w (τυχαίο στοιχείο του W) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $f(v_1), \ldots, f(v_k) \Rightarrow$

$$W = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k) \rangle$$

(δ) Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση.

3.1 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Απεικόνισης

Θεώρημα 3.2 Έστω οι διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και μία γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$. Ακόμα, έστω A ένας υπόχωρος του V και B ένας υπόχωρος του W. Τότε τα σύνολα $f(A) = \{w \in W : w = f(x),\ x \in A\}$ είναι υπόχωρος του W και επίσης το σύνολο

$f^{-1}(B) = \{x \in V : f(x) \in B\}$ είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη Ισχύει ότι $f(0_V) = 0_W$ από τις ιδιότητες των υποχώρων και των γραμμικών απεικονίσεων. Έστω $w_1, w_2 \in f(A)$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε $w_1 = f(x_1)$ και $w_2 = f(x_2)$

$w_1 + w_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(A)$. (1)

Επιπλέον για $w \in f(A)$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε για $\lambda \in \mathbb{F}$ να ισχύει

$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda w$. Συνεπώς $\lambda w \in f(A)$ (2)

Από το (1) και το (2) συμπεραίνουμε ότι το $f(A)$ είναι υπόχωρος του W.

Για το σύνολο $f^{-1}(B)$, ισχύει ότι $f(0_V) = 0_W$ και άρα $0_V \in f^{-1}(B)$. Έστω $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$. Και πάλι από τις ιδιότητες της γραμμικής απεικόνισης f θα ισχύει ότι

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, δηλαδή $f(x_1) + f(x_2) \in B$

$\Rightarrow f(x_1 + x_2) \in B \Rightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(B)$

Επιπλέον για $x \in f^{-1}(B)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε

$f(\lambda x) = \lambda f(x) \in B \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(B)$

Συνεπώς το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι υπόχωρος του V. ■

Ορισμός 3.3 Έστω οι διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση.

(α) Το σύνολο $f^{-1}(\{0_W\}) = \{x \in V : f(x) = 0_W\}$ ονομάζεται πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται με $\operatorname{Ker} f$

(β) Το σύνολο $f(V) = \{w \in W : w = f(x), x \in V\}$ ονομάζεται εικόνα της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} f$

Από το θεώρημα 3.2 προκύπτει άμεσα ότι τόσο ο πυρήνας $\ker f$ της γραμμικής απεικόνισης f είναι υπόχωρος του V, όσο και ότι η εικόνα $\operatorname{Im} f$ της γραμμικής απεικόνισης f είναι υπόχωρος του W.

Παράδειγμα 3.4. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0)$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση.

Ο πυρήνας της απεικόνισης θα είναι

$$\ker f = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \} =$$

$$\{ (0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

Η εικόνα της f αντίστοιχα είναι

$$\operatorname{Im} f = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \} =$$

$$\{ (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R} \}.$$

Προφανώς $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ $\left(\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^2 \right)$

Ως άσκηση μπορείτε να βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα των ακόλουθων γραμμικών απεικονίσεων.

(α) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \longmapsto (x - y, y - x)$

(β) $f: \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ με

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \longmapsto$$
$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

Θεώρημα 3.3 Έστω οι διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Η f είναι 1-1

(β) $Ker f = \{0_V\}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η f είναι 1-1 και $x \in Ker f$. Τότε $f(x) = 0_W$. Όμως ισχύει και ότι $f(0_V) = 0_W$. Επομένως $f(x) = f(0_V)$. Επειδή η f είναι 1-1 θα πρέπει εξ ορισμού $x = 0_V$. Συνεπώς $Ker f = \{0_V\}$.

Έστω τώρα ότι $Ker f = \{0_V\}$ και $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in V$. Τότε $f(x) - f(y) = 0_W \Rightarrow$ $f(x-y) = 0_W \Rightarrow x - y = 0_V$ αφού $x - y \in Ker f$

Συνεπώς $x = y$ που σημαίνει ότι η f είναι 1-1

Πρόταση 3.2 Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ τότε $f(V) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k) \rangle$

<u>Απόδειξη</u> Αφήνεται ως άσκηση

Θεώρημα 3.4 Έστω οι διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και έστω $f, g: V \to W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V και $f(v_1) = g(v_1)$, $f(v_2) = g(v_2)$, $\dots$, $f(v_k) = g(v_k)$ τότε

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in V.$$

(Δηλαδή $f = g$)

<u>Απόδειξη</u> Έστω ένα $x \in V$. Επειδή $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

είναι σύνολο γεννητόρων του V θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_k f(v_k) \\ &= \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) + \ldots + \lambda_k g(v_k) \\ &= g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = g(x). \end{aligned}$$

Επειδή το $x \in V$ επιλέχθηκε τυχαία, η πρόταση ισχύει για κάθε $x \in V$ και συνεπώς $f = g$

Θεώρημα 3.5 Έστω δυο διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ μια διατεταγμένη βάση του W. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: V \to W$ με την ιδιότητα

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2 \ldots f(v_k) = w_k$$

<u>Απόδειξη</u> (α) Ύπαρξη. Θα ορίσουμε $f: V \to W$ μια απεικόνιση για την οποία θα ισχύει

$$f(v_i) = w_i$$

για $i = 1, 2, \ldots, k$.

και έστω $x \in V$. Επειδή το $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ είναι βάση του V θα υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{F}$: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ τέτοια ώστε

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$$

Αν ορίσουμε τον κανόνα η f να αντιστοιχίζει το $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_k w_k \in W$ στο x τότε η f είναι γραμμική απεικόνιση, για την οποία

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_k$$

που θα δίνει $f(v_i) = w_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$

Άρα πράγματι υπάρχει η απεικόνιση.

(β) Μοναδικότητα. Έστω $f, g : V \to W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις με την ιδιότητα

$$f(v_i) = w_i \quad \text{για } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Από το Θεώρημα 3.4 έπεται άμεσα ότι $f = g$ ■

3.2 Γραμμικές Απεικονίσεις και διάσταση Διανυσματικού Χώρου.

Θεώρημα 3.6. Έστω οι διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Τότε οι V και W είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση, δηλαδή $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$.

<u>Απόδειξη</u> Παραλείπεται. ■

Θεώρημα 3.7 Έστω δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης V και W επί του $\mathbb{F}$. Αν $f : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τότε

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Ker} f) + \dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Im} f)$$

<u>Απόδειξη</u> Αφήνεται ως άσκηση. ■

Θεώρημα 3.8 Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V και W επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Αν

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W = n$$

(δηλαδή αν οι V και W είναι <u>ίδιας</u> πεπερασμένης διάστασης), τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι 1-1

(β) Η f είναι επί
(γ) Η f είναι 1-1 και επί
(δ) Η f απεικονίζει βάσεις σε βάσεις: Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι βάση του V τότε το $\{f(v_1), f(v_2), \dots f(v_k)\}$ είναι βάση του W.

<u>Απόδειξη</u> Είναι άμεση από τα προηγούμενα θεωρήματα της ενότητας και αφήνεται ως άσκηση. ●

3.4 Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων

Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα διανυσματικό χώρο W συμβολίζεται με $\mathcal{L}(V, W)$. Μέσα σε αυτές τις απεικονίσεις μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα δύο γραμμικών απεικονίσεων:

$$+ : V \longrightarrow W \text{ με } x \longmapsto f(x) + g(x).$$

όπως και το γινόμενο με ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$.

$$\cdot : V \longrightarrow W \text{ με } x \longmapsto \lambda f(x)$$

Οι δύο αυτές απεικονίσεις αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γραμμικές και συνεπώς ανήκουν και αυτές στο $\mathcal{L}(V, W)$. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ θα είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

Αν επιπλέον $W = V$ τότε ορίζονται οι συνθέσεις

$$f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$$
$$(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$$

και $f\circ(\lambda g) = \lambda(f\circ g) = (\lambda f)\circ g \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

Τέλος αν $n\in\mathbb{N}$ και $f: V\to V$, όπου V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ μπορούμε να ορίσουμε το f^n ως εξής

$$\text{για } n=1 \quad f^1 = f$$
$$\text{για } n>1 \quad f^{n+1} = f^n \circ f$$

Ως f^0 θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση 1_V.