1. Πίνακες & Γραμμικά Συστήματα Εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα: Έχουμε τρία διαφορετικά είδη καλαμποκιού τοποθετημένα σε τρία διαφορετικά δοχεία. Η ποσότητα που περιέχει κάθε δοχείο είναι άγνωστη και δεν είναι αναγκαστικά ίδια για όλα τα είδη καλαμποκιού. Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι ένα δοχείο του πρώτου είδους και δύο δοχεία του δεύτερου είδους και τρία δοχεία του τρίτου είδους είναι συνολικά 26 μονάδες βάρους. Επίσης δύο δοχεία του πρώτου είδους, τρία δοχεία του δεύτερου είδους και ένα δοχείο του τρίτου είδους είναι συνολικά 34 μονάδες βάρους. Τέλος, τρία δοχεία του πρώτου είδους, δύο δοχεία του δεύτερου είδους και ένα δοχείο του τρίτου είδους είναι συνολικά 39 μονάδες βάρους. Πόσες μονάδες βάρους θα περιέχει ένα δοχείο από κάθε είδος καλαμποκιού;

Αν x_1, x_2 και x_3 είναι οι αντίστοιχες μονάδες βάρους που περιέχονται σε ένα δοχείο για κάθε ένα είδος καλαμποκιού τότε το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 26 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 34 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 39
\end{aligned}
$$

(Το πρόβλημα εμφανίζεται στο κινέζικο μαθηματικό κείμενο « 9 κεφάλαια της τέχνης των Μαθηματικών » του 200 π.Χ.)

Για την επίλυση του προβλήματος κατασκευάζεται ο ακόλουθος πίνακας, που αποτελεί μια εκδοχή αυτού που ονομάζουμε επαυξημένο πίνακα στη σύγχρονη Γραμμική Άλγεβρα:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{matrix}$$

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς ο πίνακας γράφεται:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{matrix}$$

Από τον οποίο οδηγούμαστε στη λύση

$$x_1 = \frac{37}{4}, \quad x_2 = \frac{17}{4} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{11}{4}.$$

1.2 Πίνακες

Συμβολισμοί:

α) Με το σύμβολο $\mathbb{F}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών η το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

β) Με τα σύμβολα μ, ν (ή m, n) θα δηλώνουμε θετικούς ακέραιους (εκτός αν οριστούν διαφορετικά κατά περίπτωση) γ) Με $\mathbb{F}^\nu$ συμβολίζουμε το σύνολο διατεταγμένων ν-άδων

$$(a_1, a_2, \dots, a_\nu)$$

τέτοιες ώστε $a_i \in \mathbb{F}$ $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$.
Τα στοιχεία του $\mathbb{F}^\nu$ θα τα ονομάζουμε και διανύσματα

Πίνακας ν γραμμών και μ στηλών θα ονομάζεται μια «διάταξη» σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

και $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$ αν $a_{ij} \in \mathbb{F}$ $\forall i = 1, \dots, \nu$ και $\forall j = 1, \dots, \mu$
Για το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A ο δείκτης i συμβολίζει τη γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο, ενώ ο δείκτης j τη στήλη.
Πίνακες για τους οποίους $\nu = \mu$ λέγονται τετραγωνικοί

Ορισμός 1.1 Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τα στοιχεία a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, \nu$ ονομάζονται διαγώνια στοιχεία του πίνακα A. Ο A θα λέγεται διαγώνιος πίνακας, αν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μηδενικά, δηλαδή ισχύει:

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall i \neq j$$

Ο παραπάνω πίνακας A μπορεί να γραφτεί και ως

$(a_{ij})_{\nu\times\mu}$

Παράδειγμα 1.1 Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι τετραγωνικός και μπορεί να γραφτεί ως
$A=(a_{ij})_{\nu\times\nu} = (2^{i+j})_{3\times3}$.

β) Έστω ο $\nu\times\nu$ πίνακας

$$B=\begin{bmatrix} \pi^0 & \pi^{-1} & \dots & \pi^{1-\nu} \\ \pi^1 & \pi^0 & \dots & \pi^{2-\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\nu-1} & \pi^{\nu-2} & \dots & \pi^{\nu-\nu} \end{bmatrix}$$

$B=(b_{ij})_{\nu\times\nu} = (\pi^{i-j})_{\nu\times\nu}$

γ) Έστω ο 3×3 πίνακας

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο Γ μπορεί να γραφεί ως $\Gamma=(\gamma_{ij})_{\nu\times\nu}=(1)_{3\times3}$.

Ορισμός 1.2 Έστω δύο $\nu\times\mu$ πίνακες, A και B. Οι πίνακες A και B θα είναι ίσοι, $A=B$, αν και μόνο αν $a_{ij}=b_{ij}$ για κάθε i και για κάθε j.

Μια ειδική κατηγορία πινάκων είναι αυτοί που έχουν μόνο μια στήλη ή μόνο μια γραμμή, π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2\nu} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = [b_{11}\ b_{12}\ \ldots\ b_{1\mu}]$$

Ο πίνακας A ονομάζεται πίνακας στήλη, ενώ ο B πίνακας γραμμή και ταυτίζονται με τα διανύσματα.

Ορισμός 1.3 Έστω ένας πίνακας $A = (a_{ij})_{\nu\times\mu}$, με $a_{ij} \in \mathbb{F}$.

(α) Για $1 \leq i \leq \nu$ το στοιχείο

$r_i = (a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{i\mu})$ ονομάζεται i-γραμμή του πίνακα A.

(β) Για $1 \leq j \leq \mu$ το στοιχείο

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\nu j} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται j-στήλη του πίνακα A.

Ορισμός 1.4. Έστω ο πίνακας $\nu\times\mu$, $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Ο πίνακας μ γραμμών και ν στηλών A^T (ή A') με στοιχεία $b_{ji} = a_{ij}$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ και για κάθε $j = 1, \ldots, \mu$, ως τον ανάστροφο πίνακα του A.

Παράδειγμα 1.2 α) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Ο ανάστροφος του πίνακα A θα είναι ο πίνακας

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

β) Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

έχει ανάστροφο τον πίνακα

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.3 Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$, $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο πίνακας A θα ονομάζεται άνω τριγωνικός αν τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, δηλαδή αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Αντίστοιχα, ο πίνακας A θα ονομάζεται κάτω τριγωνικός αν τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, δηλαδή αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$.

Παράδειγμα 1.3 Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός.

Τέλος ο πίνακας

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιος.

1.2 Στοιχειώδης Άλγεβρα Πινάκων

Ορισμός 1.4 Έστω δύο $\nu \times \mu$ πίνακες A και B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

α) Αν για τον πίνακα A ισχύει ότι $a_{ij} = 0$ για κάθε i και για κάθε j, ο πίνακας λέγεται μηδενικός και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$

β) Ορίζουμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ με $x_{ij} = -a_{ij}$ για κάθε i και για κάθε j. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται αντίθετος του πίνακα A.

γ) Ορίζουμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ με $x_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, \dots, \nu$ και για κάθε $j = 1, \dots, \mu$. Ο νέος πίνακας ονομάζεται άθροισμα των A και B και συμβολίζεται με $A+B$.

δ) Για $\lambda \in \mathbb{F}$ ορίζουμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ με $x_{ij} = \lambda a_{ij}$ για κάθε $i = 1, \dots, \nu$ και για κάθε $j = 1, \dots, \mu$. Ο νέος πίνακας ονομάζεται γινόμενο του λ επί τον A και συμβολίζεται με λA

Παρατήρηση 1.1 Το γινόμενο λA, συχνά αναφέρεται ως βαθμωτό γινόμενο προκειμένου να ξεχωρίζει από άλλα γινόμενα πινάκων.

Θεώρημα 1.1. Έστω $\mu \times \nu$ πίνακες $A, B, \Gamma \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύει ότι:

α) Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης
$$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$$

β) Μηδενικό ή Ουδέτερο για την πρόσθεση στοιχείο
$$A + \mathbb{O}_{\mu\times\nu} = A$$

γ) Αντίθετο στοιχείο (ή προσθετικό αντίστροφο)
$$A + (-A) = \mathbb{O}_{\mu\times\nu}$$

δ) Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης
$$A + B = B + A$$

ε) Για το βαθμωτό γινόμενο:

(i) $1 \cdot A = A$ (το βαθμωτό γινόμενο έχει μονάδα)

(ii) $(-1) \cdot A = -A$

(iii) $a(bA) = (ab)A$ για κάθε $a, b \in \mathbb{F}$

(iv) $(a+b)A = aA + bA$ για κάθε $a, b \in \mathbb{F}$

(v) $a(A+B) = aA + aB$ για κάθε $a \in \mathbb{F}$

<u>Απόδειξη</u> Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από τον ορισμό 1.4 και αφήνεται ως άσκηση.

Πόρισμα 1.1 Έστω δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $a, b \in \mathbb{F}$. Τότε:

α) Αν $X + A = \mathbb{O}$, τότε $X = -A$

β) $-(-A) = A$

γ) $0 \cdot A = \mathbb{O}$

δ) $(-a)A = -(aA) = a(-A)$

ε) Αν $aA = bB$ και $a \neq 0$, τότε

$$A = \frac{b}{a} B$$

Παράδειγμα 1.14 Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -4 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-1 & -1+5 & 5-6 \\ 0 & 0 & 3+0 & -2+7 \\ 1-4 & 1+8 & 1+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.5 Η διαφορά δύο $\nu \times \mu$ πινάκων A και B ορίζεται ως ο πίνακας $(x_{ij})_{\nu \times \mu}$ με $x_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$,

$$A - B = A + (-B)$$

Πρόταση 1.1 Έστω $\nu \times \mu$ πίνακες A, B και $\Gamma \in F^{\nu \times \mu}$ και $a, b \in F$
Τότε:

α) $aA - bB = -bB + aA$

β) $\alpha A - (\beta B - \gamma \Gamma) = \alpha A - \beta B + \gamma \Gamma$

γ) $\alpha(B - \Gamma) = \alpha B - \alpha \Gamma$

δ) $\alpha \Gamma - \beta \Gamma = (\alpha - \beta)\Gamma$

ε) $A - B - \Gamma = -B + A - \Gamma = -\Gamma - B + A$

Παρατήρηση 1.2 Όσον αφορά την πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ πινάκων από τους παραπάνω ορισμούς και προτάσεις προκύπτει ότι βασική προϋπόθεση είναι να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) τους ακόλουθους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.6 Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\nu \times \nu$ A. Ο A θα λέγεται συμμετρικός αν

$$A = A^T$$

Ο A θα λέγεται αντισυμμετρικός αν

$$A = -A^T$$

1.4 Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Γραμμών Πινάκων.

Συχνά ένα πρόβλημα μαθηματικής φύσης συνδέεται με ένα πίνακα αρκετά πολύπλοκο. Σε αυτές τις περιπτώσεις η δυνατότητα μελέτης του πίνακα και κατά συνέπεια η επίλυση του προβλήματος συνδέεται με τη δυνατότητα να απλοποιήσουμε τον πίνακα. Ειδικότερα η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων συνδέεται με τον επαυξημένο πίνακα, η απλοποίηση του οποίου μας οδηγεί σε ένα νέο σύστημα εξισώσεων που είναι ευκολότερο να λυθεί.

Για την απλοποίηση που προαναφέρθηκε είναι απαραίτητοι κάποιοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί:

Ορισμός 1.7 Έστω ένας $\nu \times \mu$ πίνακας $A = (a_{ij})_{\nu\times\mu}$ με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί του πίνακα A ονομάζονται Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί των Γραμμών του A (ΣΜΓ του A)

α) Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων της i γραμμής του A με $\lambda \in \mathbb{F}$ και $\lambda \neq 0$ $(1 \leq i \leq \nu)$ Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα A παραμένουν αναλλοίωτα. (Σημείωση: Αν με r_i συμβολίζουμε την i γραμμή, τότε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού είναι το λr_i)

β) Πρόσθεση στην i γραμμή του A το λr_k, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του A παραμένουν ίδια, $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$ και r_k είναι η k γραμμή του A

γ) Εναλλαγή της γραμμής i του A με την k γραμμή, ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του A παραμένουν ίδια.

Συνοπτικά οι τρεις παραπάνω μετασχηματισμοί γράφονται ως:

α) $r_i \longrightarrow \lambda r_i$, $\lambda \neq 0$

β) $r_i \longrightarrow r_i + \lambda r_k$, $\lambda \neq 0$ και $i \neq k$

γ) $r_i \longleftrightarrow r_k$

Ορισμός 1.8 Δύο πίνακες $\nu \times \mu$, A και B θα λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι, αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Παράδειγμα 1.5 Έστω ο πίνακας 3×5

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to 2r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 4r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to 3r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 30r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -466 & 260 & -451 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{-1}{466} r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix} = B$$

Ο πίνακας B είναι γραμμοισοδύναμος προς τον A και είναι απλούστερος.

Ορισμός 1.9 Έστω το $a = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu) \in \mathbb{F}^\nu$. Ονομάζουμε ηγετικό στοιχείο της ν-άδας το πρώτο από τα στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_\nu$ που είναι διάφορο του 0.

Ορισμός 1.10 Έστω ένας πίνακας A. Ο A ονομάζεται κλιμακωτός αν ισχύουν:

α) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A, ισούται με 1.

β) Το ηγετικό 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής του A βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της προηγούμενης γραμμής.

γ) Αν ο A έχει κάποια μηδενική γραμμή, τότε κάθε επόμενη γραμμή του είναι και αυτή μηδενική.

Αν επιπλέον ισχύει

δ) Σε κάθε μη μηδενική γραμμή, το ηγετικό 1

είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.
ο πίνακας λέγεται Ανηγμένος Κλιμακωτός.

Παράδειγμα 1.6. Ο πίνακας A του παραδείγματος 1.5 δεν είναι κλιμακωτός

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Παραβιάζονται οι συνθήκες (α) και (β) του ορισμού 1.10.

Ο πίνακας B του παραδείγματος 1.5 είναι κλιμακωτός

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix}$$

Ωστόσο δεν είναι ανηγμένος κλιμακωτός αφού παραβιάζεται η συνθήκη (δ).

Τέλος, έστω ο πίνακας

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός

Θεώρημα 1.2 Έστω A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας και κ ένας θετικός ακέραιος. Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς κάποιον πίνακα X, του οποίου οι πρώτες $\min(\kappa,\mu)$ στήλες σχηματίζουν έναν $\nu \times \min(\kappa,\mu)$ πίνακα που είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Απόδειξη: Έστω ο $\nu \times \mu$ πίνακας A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

Για $\kappa=1$ έχουμε δύο περιπτώσεις.

α) Η πρώτη στήλη του A είναι μηδενική, οπότε $X = A$

β) Η πρώτη στήλη του A είναι μη μηδενική. Συνεπώς υπάρχει i τέτοιο ώστε το $a_{i1} \neq 0$ και $1 \leq i \leq \nu$. Εκτελώντας κατά σειρά τους μετασχηματισμούς

$$(1) \quad r_i \longrightarrow \frac{1}{a_{i1}} r_i$$

$$(2) \quad r_1 \longleftrightarrow r_i$$

Ο μετασχηματισμός (1) έχει ως σκοπό την εμφάνιση του 1 ως ηγετικού στοιχείου στη γραμμή i. Ο μετασχηματισμός (2) έχει στόχο το ηγετικό 1 που δημιουργήθηκε (από το μετασχηματισμό (1)) να βρεθεί στη θέση (1,1) (1η γραμμή - 1η στήλη)

Ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας B που προκύπτει θα έχει τη μορφή

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

για τον οποίο θα ισχύει $b_{11}=1$.
Στη συνέχεια, εκτελούμε διαδοχικά το μετασχηματισμό

$$(3)\quad r_s \longrightarrow r_s - b_{s1}\cdot r_1$$

για $s=2,3,\dots,\nu$ με σκοπό σε όλες τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα το πρώτο στοιχείο να είναι μηδενικό, καταλήγοντας σε ένα πίνακα

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1\mu} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{\nu 2} & \dots & x_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

για τον οποίο η στήλη 1 $[1\ 0\ \dots\ 0]'$ είναι ένας πίνακας ανηγμένος κλιμακωτός

Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιο $k=l$, όπου l θετικός ακέραιος. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για $l+1$. Υποθέτοντας ότι το θεώρημα ισχύει για $k=l$ τότε υπάρχει πίνακας $\Psi=(\psi_{ij})_{\nu\times\mu}$ του οποίου οι l πρώτες στήλες σχηματίζουν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $\nu\times l$. Θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) $\mu\leq l$. Τότε η συνεπαγωγή είναι προφανής καθώς $\min(l,\mu)=\min(l+1,\mu)=\mu$. (Ο ζητούμενος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας θα είναι ο

ίδιος για l και $l+1$.
β) $l<\mu$, οπότε $l+1\leq \mu$. Για την περίπτωση αυτή έχουμε τρεις υποπεριπτώσεις. Αν Z είναι ο πίνακας που σχηματίζουν οι l πρώτες στήλες του Y και f είναι η $l+1$ στήλη του Y, τότε
β1) Αν $Z=0$. Ακολουθώντας τους ίδιους μετασχηματισμούς όπως για $l=1$, χωρίς τα μηδενικά των l πρώτων στηλών να επηρεάζουν τη διαδικασία, θα πάρουμε τον ζητούμενο πίνακα.
β2) Αν η στήλη f του Y είναι μηδενική, τότε οι $l+1$ πρώτες στήλες του Y αποτελούν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.
β3) $Z\neq 0$ και $f\neq 0$. Έστω i ο μέγιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο η i γραμμή του Y έχει ηγετικό 1 σε κάποια από τις l πρώτες στήλες. (Η i γραμμή του Y θα είναι η κατώτερη στη διάταξη των γραμμών του Y με ηγετικό 1 που είναι στοιχείο του Z. Αυτό το i θα υπάρχει αφού $Z\neq 0$. Από αυτό συνεπάγεται ότι ο Z κάτω από την γραμμή i θα έχει μόνο μηδενικά στοιχεία. Διακρίνουμε εκ νέου δύο υποπεριπτώσεις.
β3Α) Αν η στήλη f έχει μόνο μηδενικά στοιχεία οι $l+1$ πρώτες στήλες του Y (θα είναι ο πίνακας $(Z\,f)$) είναι ο ζητούμενος $\nu\times(l+1)$ ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας
β3Β) Η στήλη f έχει κάποια μη μηδενικά στοιχεία πιο κάτω από την γραμμή i, έστω t (το στοιχείο $y_{t,l+1}\neq 0$) Εκτελώντας τους μετασχηματισμούς

(1) $r_t \longrightarrow 1/y_{t,l+1}\cdot r_t$

(2) $r_{i+1} \longleftrightarrow r_t$

(3) $r_s \longleftrightarrow r_s - y_{s,l+1}\cdot r_{i+1}$ για $1\leq s\leq \nu$

και $s \neq i+1$
θα πάρουμε τον ζητούμενο πίνακα. Με το μετασχηματισμό (1) το στοιχείο $(t, l+1)$ γίνεται ίσο με 1. Με το μετασχηματισμό (2) το στοιχείο $(i+1, l+1)$ γίνεται ηγετικό 1. Τέλος ο μετασχηματισμός (3) μηδενίζει όλα τα στοιχεία της στήλης $l+1$ εκτός του $(i+1, l+1)$. Έτσι οι πρώτες $l+1$ στήλες του τελικού πίνακα σχηματίζουν ένα ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα 1.7 Συνεχίζοντας από τα παραδείγματα 1.5 και 1.6 ο πίνακας B δεν είναι ανηγμένος κλιμακωτός

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 6r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 94 & -52 & 90 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 94r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{24336}{233} & -\frac{454}{466} \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 15r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{24336}{233} & -\frac{454}{466} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{147}{233} & \frac{225}{466} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{130}{233} & \frac{451}{466} \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Θεώρημα 1.3 Κάθε πίνακας είναι γραμμοισοδύναμος προς κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό.

<u>Απόδειξη</u>. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1.2.

Παρατήρηση 1.3 Η διαδικασία που περιγράφεται στο Θεώρημα 1.2 είναι γνωστή ως Απαλοιφή Gauss

1.5 Γινόμενο Πινάκων

Ορισμός 1.11 Έστω ένας $\nu \times k$ πίνακας A και ο $k \times \mu$ πίνακας B. Ορίζουμε το γινόμενο A·B ως τον $\nu \times \mu$ πίνακα $(t_{ij})_{\nu \times \mu}$ έτσι ώστε

$$t_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

Παράδειγμα 1.8 Έστω οι δύο πίνακες

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο A·B ορίζεται καθώς

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{B}$$

Ωστόσο το γινόμενο B·A δεν ορίζεται καθώς

$$\underset{3\times 3}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A}$$

Θεωρήστε τον πίνακα γραμμή

$\underset{1\times\nu}{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\nu]$ και τον πίνακα

στήλη $\underset{\nu\times 1}{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}$

Το γινόμενο $A\cdot B$ είναι

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\nu] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_\nu b_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i b_i$$

Παράδειγμα 1.9. $A = [1 \ 2 \ 5 \ 0]$ και

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\cdot B = [1 \ 2 \ 5 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 5\cdot 2 + 0\cdot 1 = 2 + 0 + 10 + 0 = 12.$$

Έστω ο πίνακας ν×μ, A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να γράψουμε κάθε γραμμή του A ως

$$r_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{i\mu}]$$

και κάθε στήλη του A ως

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\nu j} \end{bmatrix}$$

Τότε το στοιχείο t_{ij} του πίνακα A·B θα είναι το

$$t_{ij} = r_i \cdot c_j$$

Πόρισμα 1.2 Έστω $A = (a_{ij})_{\nu \times k}$ ένας ν×k πίνακας και $B = (b_{ij})_{k \times \mu}$ ένας k×μ πίνακας, όπου ν, k, μ είναι θετικοί ακέραιοι. Το γινόμενο A·B είναι ένας ν×μ πίνακας του οποίου το στοιχείο (s,t) είναι το γινόμενο της s-γραμμής του A με την t-στήλη του B.

$$r_s \cdot c_t = \sum_{i=1}^{k} a_{si} b_{it}$$

Παράδειγμα 1.10 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\cdot3+2\cdot0+3\cdot(-1) & 0\cdot0+2\cdot1+3\cdot1 \\ 1\cdot3+1\cdot0+(-1)(-1) & 1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3\cdot0+0\cdot1 & 3\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot3+0(-1) \\ 0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot3+1(-1) \\ -1\cdot0+1\cdot1 & (-1)\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot3+1\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 1.12 Ταυτοτικός $\nu\times\nu$ πίνακας (I_ν) ονομάζεται ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο ίσα με 1.

$$I_\nu = (\delta_{ij})_{\nu\times\nu}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ i=j \\ 0 & \alpha\nu \ i\neq j \end{cases}$$

Ορισμός 1.13 Η συνάρτηση $\delta: A\times B \longrightarrow \{0,1\}$, όπου A,B δυο σύνολα, με

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ i=j \\ 0 & \alpha\nu \ i\neq j \end{cases}$$

ονομάζεται *Δέλτα του Kronecker*

Πρόταση 1.2 Το γινόμενο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Επίσης το γινόμενο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός πίνακας

Απόδειξη Έστω $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ και $B=(b_{ij})_{\nu\times\nu}$ άνω τριγωνικοί πίνακες. Το (i,j) στοιχείο του $A\cdot B$ είναι

$$t_{ij} = \sum_{s=1}^{\nu} a_{is} b_{sj}$$

Αν $i>j$, για $1\leq s\leq \nu$, έπεται ότι ή θα είναι $s>j$ ή $s<i$ άρα ή θα είναι $b_{sj}=0$ ή θα είναι $a_{is}=0$. Άρα για $i>j$ το στοιχείο (i,j) του AB θα είναι 0 και ο AB θα είναι άνω τριγωνικός.
Αναλόγως αποδεικνύεται η περίπτωση του γινομένου κάτω τριγωνικών πινάκων.

Θεώρημα 1.4 Έστω $a, b \in \mathbb{F}$ και $\nu, \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$ (θετικοί ακέραιοι) και $A = (a_{ij})_{\nu\times\kappa}$, $B = (b_{ij})_{\kappa\times\lambda}$, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{\lambda\times\mu}$, $S = (s_{ij})_{\kappa\times\lambda}$, $T = (t_{ij})_{\kappa\times\lambda}$ πίνακες. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

α) $I_\nu \cdot A = A \cdot I_\kappa = A$.

β) $A\cdot(B\cdot\Gamma) = (A\cdot B)\cdot\Gamma$

γ) $a\cdot b\cdot\Gamma = (ab)\cdot\Gamma$

δ) $a(B\cdot\Gamma) = (aB)\cdot\Gamma = B\cdot(a\Gamma)$

(Οι παραπάνω ισότητες (δ) εκφράζουν την προσεταιριστική ιδιότητα στο πλαίσιο το οποίο ορίζονται)

ε) $A\cdot(B+S) = A\cdot B + A\cdot S$

(Η ισότητα (ε) εκφράζεται ως: «Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι αριστερά επιμεριστικός»)

στ) $(B+T)\cdot\Gamma = B\cdot\Gamma + T\cdot\Gamma$

(Η ισότητα (στ) εκφράζεται ως: «Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι δεξιά επιμεριστικός»)

__Απόδειξη__ Αφήνεται ως φροντιστηριακή άσκηση.

Πρόταση 1.3 Έστω A ένας $\nu\times\mu$ πίνακας και κ ένας θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει

α) $\mathbb{O}_{\kappa\times\nu}\cdot A = \mathbb{O}_{\kappa\times\mu}$

β) $A\cdot\mathbb{O}_{\mu\times\kappa} = \mathbb{O}_{\nu\times\kappa}$.

__Απόδειξη__ Λόγω του ουδέτερου στοιχείου έχουμε

$$\mathbb{O}_{\kappa\times\nu}\cdot A =$$

$$\kappa \text{ γραμμές}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\nu \text{ στήλες}}\right. \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu1} & a_{\nu2} & \cdots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}}_{\mu \text{ στήλες}} = \left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\} \nu \text{ γραμμές}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i1} & \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i\mu} \\ \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i1} & \sum_{i=1}^{\nu} 0\, a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} 0\, a_{i1} & \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} 0\cdot a_{i\mu} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{i1} & 0\cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{i2} & \cdots & 0\sum_{i=1}^{\nu} a_{i\mu} \\ 0\cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{i1} & 0\cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{i2} & \cdots & 0\sum_{i=1}^{\nu} a_{i\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\sum_{i=1}^{\nu} a_{i1} & 0\cdot \sum_{i=1}^{\nu} a_{i2} & \cdots & 0\sum_{i=1}^{\nu} a_{i\mu} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mu \text{ στήλες}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} \kappa \text{ γραμμές} = \mathbb{O}_{\kappa\times\mu}$$

Όμοια αποδεικνύεται και το (β).

Ορισμός 1.14 Αν A και B είναι δύο πίνακες για τους οποίους ισχύει $A\cdot B = B\cdot A$, λέμε ότι οι πίνακες μετατίθενται.

Παρατήρηση 1.4 Ο παραπάνω ορισμός έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς για τον πολλαπλασιασμό πινάκων <u>δεν</u> ισχύει η μεταθετική ιδιότητα, δηλαδή εν γένει δεν ισχύει ότι

$$A\cdot B = B\cdot A.$$

Πράγματι αν A $\nu\times\mu$ πίνακας και B $\mu\times\kappa$ πίνακας το γινόμενο θα είναι $\Gamma = A\cdot B$ ένας $\nu\times\kappa$ πίνακας

Ωστόσο το γινόμενο BA δεν ορίζεται, παρά μόνο αν $k=\nu$. Σε αυτή την περίπτωση το γινόμενο θα είναι

$$\Delta = B \cdot A$$

θα είναι ένας $\mu \times \mu$ πίνακας, ενώ ο Γ θα είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας, δηλαδή οι Δ και Γ θα είναι πίνακες με διαφορετικό πλήθος στοιχείων (θα ανήκουν και σε διαφορετικά σύνολα) οπότε αδύνατο να είναι ίσοι.

Ορισμός 1.15 Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A $\mu \times \mu$. Τότε ορίζεται επαγωγικά ο A^ν για $\nu = 0,1,2,\ldots$ ως εξής:

α) $A^0 = I_\nu$

β) $A^\nu = A^{\nu-1} \cdot A$, για $\nu \in \mathbb{N}$

Θεώρημα 1.5. Έστω A και B τετραγωνικοί πίνακες που μετατίθενται και $k, \lambda \in \mathbb{N}_0$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω

α) $A^k A^\lambda = A^{k+\lambda} = A^\lambda A^k$

β) $(A^k)^\lambda = A^{k\lambda}$

γ) $(AB)^k = A^k B^k = B^k A^k$

<u>Απόδειξη</u> Η απόδειξη βασίζεται στη μέθοδο της επαγωγής και την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $AB = BA$ εφόσον οι A και B μετατίθενται. ∎

Ορισμός 1.16. Έστω οι πίνακες $A_1, A_2, \ldots A_k$, αντιστοίχως $\nu_1 \times \nu_2$, $\nu_2 \times \nu_3, \ldots, \nu_k \times \nu_{k+1}$. Τότε ορίζεται επαγωγικά το γινόμενο $A_1 A_2 \ldots A_k$ ως εξής

$$A_1 A_2 \ldots A_k = \begin{cases} A_1 & \text{αν } k=1 \\ (A_1 \ldots A_{k-1})A_k & \text{αν } k \geq 2. \end{cases}$$

Για οποιοδήποτε πλήθος πινάκων $A_1, A_2, \ldots A_k$ όπως στον προηγούμενο ορισμό αποδεικνύεται ότι

$$(A_1 A_2 \ldots A_k)' = A_k' A_{k-1}' \ldots A_2' A_1'$$

1.6 Αντίστροφος Πίνακας.

Ορισμός 1.17 Έστω A ένας $\nu\times\nu$ πίνακας. Λέμε ότι ο $\nu\times\nu$ πίνακας B είναι αντίστροφος του A όταν

$$A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$$

Παράδειγμα 1.11 Θεωρούμε τον πίνακα

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Θα εξετάσουμε αν ο πίνακας A έχει αντίστροφο. Αν υπάρχει αυτός θα έχει τη μορφή

$$\underset{2\times 2}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

και θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} -b_{11} + 2b_{12} & 2b_{11} + 5b_{12} \\ -b_{21} + 2b_{22} & 2b_{21} + 5b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων

$$-b_{11} + 2b_{12} = 1 \quad (1)$$
$$2b_{11} + 5b_{12} = 0 \quad (2)$$
$$-b_{21} + 2b_{22} = 0 \quad (3)$$
$$2b_{21} + 5b_{22} = 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με 2 θα έχουμε

$$-2b_{11} + 4b_{12} = 2 \quad (1')$$
$$2b_{11} + 5b_{12} = 0 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1') και (2) θα έχουμε

$$\cancel{-2b_{11}} + \cancel{2b_{11}} + 4b_{12} + 5b_{12} = 2 \Leftrightarrow$$
$$9b_{12} = 2 \Rightarrow b_{12} = 2/9$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και λύνοντας ως προς b_{11} θα έχουμε

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2b_{12} - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{2}{9} - 1 \\ &= \frac{4}{9} - 1 \\ &= -\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζουμε την (3) με 2 και παίρνουμε

$$-2b_{21} + 4b_{22} = 0 \qquad (3')$$

Προσθέτοντας την (3') στην (4) θα έχουμε

$$9b_{22} = 1$$

οπότε $\quad b_{22} = 1/9 \quad$ και

$$b_{21} = 2b_{22} = 2/9.$$

Ο πίνακας B θα έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} -5/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Τέλος πρέπει να εξετάσουμε αν ισχύει και $AB = I_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5/9 + 4/9 & -2/9 + 2/9 \\ -10/9 + 10/9 & 4/9 + 5/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε ο πίνακας B είναι ο αντίστροφος του A.

Πρόταση 1.4 Αν υπάρχει ο αντίστροφος ενός (τετραγωνικού) πίνακα, τότε αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και B, Γ δύο αντίστροφοί του. Τότε θα πρέπει

$$AB = BA = I_\nu \quad \text{και}$$
$$A\Gamma = \Gamma A = I_\nu .$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\Gamma = \Gamma \cdot I_\nu = \Gamma \cdot (AB) = (\Gamma A) B = I_\nu \cdot B = B.$$

Οπότε ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός.

Ένας πίνακας που έχει αντίστροφο ονομάζεται αντιστρέψιμος ή μη-ιδιάζων, ενώ ένας πίνακας που δεν έχει αντίστροφο ονομάζεται μη-αντιστρέψιμος ή ιδιάζων. Ο αντίστροφος συμβολίζεται με A^{-1}

Πρόταση 1.5 Έστω αντιστρέψιμοι $\nu \times \nu$ πίνακες $A, B, A_1, A_2, \dots A_k$. Τότε ισχύει ότι

α) $(A^{-1})^{-1} = A$

β) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

γ) $(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$

Απόδειξη

α) Ισχύει $A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I_\nu$

Συνεπώς ο αντίστροφος του A^{-1} είναι ο A:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

β) Ισχύει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) =$$
$$A(I_\nu \cdot A^{-1}) = AA^{-1} = I_\nu .$$

Όμοια θα ισχύει και

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_\nu .$$

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής ως εξής

Για ~~κ=1~~ είναι προφανές και για $k=2$ το

δείξατε στο (β).
Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $k' \geq 2$
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $k'+1$.

$$(A_1 \cdot A_2 \ldots A_{k'+1})^{-1} = [(A_1 \cdot A_2 \ldots A_{k'}) A_{k'+1}]^{-1} =$$

$$A_{k'+1}^{-1} (A_1 A_2 \ldots A_{k'})^{-1}$$

Επειδή από υπόθεση ισχύει η πρόταση για k'

$$(A_1 A_2 \ldots A_{k'})^{-1} = A_{k'}^{-1} A_{k'-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Οπότε τελικά

$$(A_1 A_2 \ldots A_{k'} A_{k'+1})^{-1} = A_{k'+1}^{-1} A_{k'}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

και η πρόταση ισχύει για $k'+1$. Επειδή το k' έχει επιλεγεί αυθαίρετα η πρόταση ισχύει $\forall k \in \mathbb{N}$

Πρόταση 1.6 Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες $\nu \times \nu$, A και B τέτοιοι ώστε $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$ με $A \cdot B = \mathbb{O}$
Τότε οι A και B είναι ιδιάζοντες

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει και τουλάχιστον ένας είναι αντιστρέψιμος. (έστω ο A)
Θα υπολογίσουμε το γινόμενο

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_\nu \cdot B = B. \quad (1)$$

Θα ισχύει όμως

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}\mathbb{O} = \mathbb{O} \quad (2)$$

οπότε από (1) και (2) $B = \mathbb{O}$ Άτοπο

Ορισμός 1.18 Έστω A ένας ν×ν αντιστρέψιμος πίνακας και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Τότε ορίζουμε:

$$A^{\kappa} = \begin{cases} A^{\kappa} & \text{αν } \kappa \geq 0 \\ (A^{-1})^{-\kappa} & \text{αν } \kappa < 0. \end{cases}$$

Ορισμός 1.19 Έστω ένας πίνακας μ×ν, A. Ο πίνακας ν×μ, B, θα ονομάζεται αριστερός αντίστροφος του A αν ισχύει

$$BA = I_{\nu}$$

Αντίστοιχα, ο B θα ονομάζεται δεξιός αντίστροφος του A αν

$$A \cdot B = I_{\mu}$$

Παρατήρηση 1.5 Από τους ορισμούς 1.17 και 1.19 προκύπτει ότι για ένα τετραγωνικό αντιστρέψιμο πίνακα, ο αριστερός αντίστροφος ταυτίζεται με τον δεξιό αντίστροφο.

Παράδειγμα 1.12 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $B(x,y) = \begin{bmatrix} x & -x & (1+x)/4 \\ y & 1-y & y/4 - 1/2 \end{bmatrix}$

εκφράζει ένα σύνολο άπειρων αριστερών αντιστρόφων του A καθώς $BA = I_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Έστω $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \end{bmatrix}$ ένας δεξιός

αντίστροφος του A. Τότε $A\Gamma = I_3$ και θα πρέπει

$$\gamma_{11} + \gamma_{21} = 1 \quad (1)$$
$$2\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0 \quad (2)$$
$$4\gamma_{11} = 0 \quad (3)$$
$$\gamma_{12} + \gamma_{22} = 0 \quad (4)$$
$$2\gamma_{12} + \gamma_{22} = 1 \quad (5)$$
$$4\gamma_{12} = 0 \quad (6)$$
$$\gamma_{13} + \gamma_{23} = 0 \quad (7)$$
$$2\gamma_{13} + \gamma_{23} = 0 \quad (8)$$
$$4\gamma_{13} = 1 \quad (9)$$

Από το σύστημα εξισώσεων (1)-(9) προκύπτει ότι θα πρέπει $\gamma_{11} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{11} + \gamma_{21} = 1 \Leftrightarrow \gamma_{21} = 1 \\ 2\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0 \Leftrightarrow \gamma_{21} = 0 \end{cases}$ Άτοπο

οπότε ο πίνακας A δεν έχει δεξιό αντίστροφο

Θεώρημα 1.6 Έστω ότι A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας, B ένας αριστερός αντίστροφός του και Γ ένας δεξιός αντίστροφός του. Τότε:

α) $B = \Gamma$

β) ο πίνακας $B = \Gamma$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη (α) Ισχύουν $BA = I_\nu$ και $A\Gamma = I_\mu$. Οι πίνακες B και Γ είναι $\nu \times \mu$. Μπορούμε να υπολογίσουμε

$$B = BI_\mu = B(A\Gamma) = (BA)\Gamma = I_\nu\Gamma = \Gamma.$$

(β) Έστω Δ ένας αριστερός αντίστροφος του A.

$$\Delta = \Delta I_\mu = \Delta(A\Gamma) = (\Delta A)\Gamma = I_\nu \Gamma = \Gamma$$

Όμως από το (α) $B=\Gamma$ και επομένως $\Delta = B$.
Ομοίως, έστω Δ' ένας δεξιός αντίστροφος του A

$$\Delta = I_\nu \Delta = (BA)\Delta = B(A\Delta) = BI_\mu = B.$$

Από το (α) $B=\Gamma$ και συνεπώς $\Delta = \Gamma$.

1.7 Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Ένα σύστημα μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους έχει τη μορφή

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\nu}x_\nu = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\nu}x_\nu = b_2 \\ \vdots \\ a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \ldots + a_{\mu\nu}x_\nu = b_\mu \end{array}\right\} \quad (1)$$

Τα στοιχεία $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ είναι τα άγνωστα στοιχεία του $\mathbb{F}$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε, ώστε να επαληθεύονται οι εξισώσεις του συστήματος. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \ldots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

αποτελεί τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος (ή πιο απλά πίνακα του συστήματος). Οι όροι a_{ij} ονομάζονται συντελεστές του συστήματος. Τέλος η στήλη

$$\underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\mu \end{bmatrix}$$

αποτελεί τη στήλη (πίνακα ή διάνυσμα) των σταθερών όρων του συστήματος. Από το παραπάνω σύστημα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα

$$\underset{\mu\times(\nu+1)}{(A|b)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\nu} & b_\mu \end{array}\right]$$

που ονομάζεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος

Ορισμός 1.20 Για το παραπάνω σύστημα (1) μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους:

α) Ένα στοιχείο $y \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ λέγεται λύση του συστήματος αν ικανοποιούνται οι μ εξισώσεις:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1\nu}y_\nu &= b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2\nu}y_\nu &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{\mu 1}y_1 + a_{\mu 2}y_2 + \dots + a_{\mu\nu}y_\nu &= b_\mu \end{aligned}$$

$\underset{\sim}{y} = [y_1 \ y_2 \ldots y_\nu]'$

β) Δυο συστήματα λέγονται ισοδύναμα, αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

γ) Ένα σύστημα λέγεται συμβιβαστό αν έχει τουλάχιστο μια λύση.

δ) Ένα σύστημα λέγεται αδύνατο ή ασυμβίβαστο αν δεν έχει καμία λύση.

ε) Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν $\underset{\sim}{b} = \mathbb{O}_{\mu\times 1}$

στ) Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση το $\mathbb{O}_{\nu\times 1}$ που λέγεται τετριμένη λύση.

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων (1) μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή πινάκων ως εξής

$$\underset{\mu\times\nu}{A}\ \underset{\nu\times 1}{x} = \underset{\mu\times 1}{b}$$

Πρόταση 1.7. Έστω ένα σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους της μορφής $Ax = b$ και $(A|b)$ είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος. Αν M ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\mu\times\mu$ τότε το σύστημα είναι ισοδύνατο με το $(MA)x = Mb$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $y \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ μια λύση του συστήματος $Ax = b$. Τότε θα ισχύει

$$Ay = b$$

Αν $M \in \mathbb{F}^{\mu\times\mu}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά θα έχουμε

$$M(Ay) = M\cdot b \Leftrightarrow$$

$$(MA)y = Mb.$$

Επομένως το $y \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ικανοποιεί τοι καινούριο σύστημα και είναι λύση.
Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο. ✎

Παράδειγμα 1.13. α) Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος θα είναι

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Με τη απαλοιφή Gauss βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό γραμμοϊσοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$x_1 = 4$$
$$x_2 + 3x_3 = -2$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Το σύνολο των λύσεων είναι

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3y-2 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{F} \right\}$$

β) Έστω το σύστημα

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος θα είναι

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

και είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 2$$

Το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.8 Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα

Έχουμε ήδη δει ότι ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A, ορίζεται ως ο πίνακας B για τον οποίο ισχύει $BA = AB = I$. Το ακόλουθο Θεώρημα συνδέει την εύρεση του αντιστρόφου πίνακα με την επίλυση γραμμικών συστημάτων και τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

Θεώρημα 1.7 Έστω A ένας $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμος πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

α) Ο A είναι αντιστρέψιμος

β) Το ομογενές σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους $Ax = \mathbb{O}$ έχει μόνο την τετριμένη λύση $x = \mathbb{O}_{\nu \times 1}$

γ) Αν B ένας γραμμοϊσοδύναμος πίνακας προς τον A, τότε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον ταυτοτικό πίνακα I_ν

δ) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
(Σημείωση: Στοιχειώδεις είναι οι πίνακες που μπορούν να προκύψουν εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον ταυτοτικό πίνακα I_v)

Απόδειξη (α) ⇒ (β)
Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$Ax = \mathbb{O}$$

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον A^{-1}

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}\mathbb{O} \Leftrightarrow$$
$$(A^{-1}A)x = \mathbb{O} \Leftrightarrow$$
$$I_v x = \mathbb{O} \Leftrightarrow$$
$$x = \mathbb{O}$$

(β) ⇒ (γ)
Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν το ομογενές σύστημα έχει ακριβώς μια λύση, τότε ο A είναι γραμμοισοδύναμος με τον ταυτοτικό πίνακα I_v. Επειδή η σχέση «γραμμοισοδύναμος» είναι σχέση ισοδυναμίας, προφανώς αφού ο B είναι γραμμοισοδύναμος προς τον A και ο A είναι γραμμοισοδύναμος προς τον I_v, τότε και ο B είναι γραμμοισοδύναμος προς τον I_v.

(γ) ⇒ (δ)
Έστω ότι ο A είναι γραμμοισοδύναμος προς τον I_v. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $A_1, A_2, \dots A_k$ τέτοιοι ώστε

$$A = A_1 A_2 \dots A_k I_\nu$$
$$= A_1 A_2 \dots A_k$$

και το γινόμενο αυτό είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Συνεπώς

$$(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Αφού το γινόμενο $A_1 A_2 \dots A_k$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε θα είναι και ο A που αποδεικνύει ότι (δ) ⇒ (α) και ολοκληρώνει την ισοδυναμία των (α) – (δ)

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος εύρεσης του αντιστρόφου πίνακα εφ' όσον αυτός υπάρχει. Πιο συγκεκριμένα γράφοντας τον πίνακα

$$(I_\nu \mid A)$$

εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα πίνακα που θα έχει τη μορφή

$$(B \mid I_\nu)$$

και ο B θα είναι ο αντίστροφος του A:

$$A^{-1} = B.$$

Παράδειγμα 1.14 α) Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Θα ελέγξουμε αν υπάρχει ο αντίστροφος του A και αν υπάρχει θα τον βρούμε. Αρχικά σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα $(I_3|A)$:

$$(I_3|A)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\to r_3+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\to -r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\to \frac{-1}{4}r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6\\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 9r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3/2 & -1/4 & -9/4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 6r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3/2 & -1/4 & -9/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 6/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεπώς καταλήξαμε στη μορφή $(B \mid I_3)$ και ο B είναι ο αντίστροφος του A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 6/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

β) Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Αρχικά γράφουμε τον 3×6 πίνακα $(I_v \mid A)$

$$(I_v \mid A) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Συνεπώς δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα πίνακα της μορφής $(B \mid I_v)$. Ειδικότερα ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός, αλλά διάφορος του I_3.
Συνεπώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.