## Ασκηση 1

Εστω τα διανύσματα $V_1=(3,0,4)$, $V_2=(-1,0,7)$, $V_3=(2,9,1)$
Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt να βρεθεί μια ορθοκανονική βαση του $\mathbb{R}^3$;

## Λύση

Το πρώτο βήμα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τα $V_1, V_2, V_3$ σε ορθοκανονική βάση είναι να τα μετατρέψουμε πρώτα σε ορθογώνια βαση $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3)$

Ο αλγόριθμος Gram-Schmidt μας λέει

- $\bar{V}_1 \equiv V_1$

- $\bar{V}_2 = V_2 - \dfrac{\langle V_2, \bar{V}_1 \rangle}{\langle \bar{V}_1, \bar{V}_1 \rangle} \cdot \bar{V}_1$

οπου

$$\langle V_2, \bar{V}_1 \rangle = V_2 \cdot V_1 = (-1)\cdot 3 + 0\cdot 0 + 7\cdot 4 = 25$$
$$\langle \bar{V}_1, \bar{V}_1 \rangle = \|V_1\|^2 = 3\cdot 3 + 0\cdot 0 + 4\cdot 4 = 9+16 = 25$$

Αρα

$$\bar{V}_2 = V_2 - \frac{\cancel{25}}{\cancel{25}} \bar{V}_1 = (-1,0,7) - (3,0,4) = (-4,0,3)$$

- $\bar{V}_3 = V_3 - \dfrac{\langle V_3, \bar{V}_1 \rangle}{\langle \bar{V}_1, \bar{V}_1 \rangle} \bar{V}_1 - \dfrac{\langle V_3 \bar{V}_2 \rangle}{\langle \bar{V}_2, \bar{V}_2 \rangle} \cdot \bar{V}_2$

έχουμε

$\langle \upsilon_3, \bar{\upsilon}_1 \rangle = 2\cdot 3 + 0\cdot 9 + 4\cdot 1 = 10$

$\langle \upsilon_3, \bar{\upsilon}_2 \rangle = 2\cdot(-4) + 9\cdot 0 + 1\cdot 3 = -5$

$\langle \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_2 \rangle = (-4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$

$$\bar{\upsilon}_3 = (2,9,1) - \frac{10}{25}\cdot(3,0,4) + \frac{5}{25}(-4,0,3)$$

$$= (2,9,1) - \left(\frac{30}{25}, 0, \frac{40}{25}\right) + \left(-\frac{20}{25}, 0, \frac{15}{25}\right)$$

$$= (2,9,1) + \left(-\frac{30}{25}, 0, -\frac{40}{25}\right) + \left(-\frac{20}{25}, 0, \frac{15}{25}\right)$$

$$= (2,9,1) + \left(-\frac{50}{25}, 0, -\frac{25}{25}\right) = (2,9,1) - (2,0,1)$$

$$= (0,9,0)$$

Τωρα που φτιαξαμε τα ορθογώνια διανύσματα $\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3$ το δευτερο βήμα είναι να διαιρέσουμε το καθένα απο αυτά με το μήκος του (βαθμωτός πολλαπλασιασμός με $1/\|\upsilon_i\|$ για $i=1,2,3$). Άρα η ορθοκανονική βάση θα είναι

$$\bar{\upsilon}_1' = \frac{\bar{\upsilon}_1}{\|\bar{\upsilon}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{25}}\cdot(3,0,4) = \frac{1}{5}(3,0,4) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$\bar{\upsilon}_2' = \frac{\bar{\upsilon}_2}{\|\bar{\upsilon}_2\|} = \frac{\bar{\upsilon}_2}{\langle \upsilon_2, \upsilon_2 \rangle^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{25}}\bar{\upsilon}_2 = \frac{1}{5}(-4,0,3) = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

$$\bar{\upsilon}_3' = \frac{\bar{\upsilon}_3}{\|\bar{\upsilon}_3\|} = \frac{\bar{\upsilon}_3}{\langle \bar{\upsilon}_3, \bar{\upsilon}_3 \rangle^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{36}}\bar{\upsilon}_3 = \frac{1}{9}\cdot(0,9,0) = (0,1,0)$$

## Ασκηση 2

Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα στο $u=(1,1,-1)$. Στη συνέχεια να βρεθούν όλα τα διανύσματα κάθετα στο επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα $u=(1,2,1)$, $v=(2,3,3)$

## Λύση

Εστω ένα διάνυσμα $v$ που είναι κάθετο στο $u$. Τότε θα ισχύει $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle = 0$ ή για $v=(v_1,v_2,v_3)$

$$v_1\cdot 1 + v_2\cdot 1 + v_3(-1) = 0 \iff v_3 = v_2 + v_1$$

Αρα οποιοδήποτε διανυσμα το οποίο δινεται από $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_3)$ θα είναι κάθετο στο $u$ $(\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R})$.

Παράδειγμα $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 5$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 1+5 = 6$ ή $\omega = (1,5,6)$. Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \omega, u\rangle$ είναι

$\langle \omega, u\rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 5 - 1\cdot 6 = 0$ άρα $\omega$ και $u$ είναι κάθετα.

Θέλουμε να βρούμε το σύνολο των διανυσμάτων τα οποία είναι κάθετα στα $u$ και $v$. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω. Για ένα $x \in \mathbb{R}^3$ αν

$$\langle x,u\rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle x,v\rangle = 0$$

τότε το $x$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $u,v$
Εστω $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ τότε

$$\langle x,u\rangle = x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad (1)$$
$$\langle x,v\rangle = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ένα σύνολο διανυσμάτων $x$ (για διαφορετικές τιμές των $x_1, x_2, x_3$) τα οποία είναι κάθετα στα $u, v$.

Λύνουμε την ① ως προς $x_1$

$x_1 = -2x_2 + x_3$ (1')

Αντικαθιστούμε στην ②

$2 \cdot (-2x_2 + x_3) + 3x_2 + 3x_3 = 0$ (2')

Λύνουμε την (2') ως προς $x_2$ και έχουμε

$-4x_2 + 2x_3 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow$

$-x_2 + 5x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 5x_3$ ③

Άρα για $x_1 = -2x_2 + x_3 \overset{③}{=} -10x_3 + x_3 = -9x_3$,
$x_2 = 5x_3$ και ένα τυχαίο $x_3 \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα

$x = (x_1, x_2, x_3) = (-9x_3, 5x_3, x_3)$ είναι

κάθετο στα $u, v$. Βλέπουμε ότι για διαφορετικές τιμές του $x_3$ προκύπτει ένα σύνολο διανυσμάτων κάθετα στα $u, v$.

**Άσκηση 3** : Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του

β) Να μετατρέψετε τα ιδιοδιανύσματα σε ορθοκανονικά

γ) Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα $A$

δ) Να υπολογίσετε τον $A^{2009}$

**Λύση**

α) Για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A$ ισχύει

$Av = \lambda v$ όπου $\lambda$: ιδιοτιμή , $v$: ιδιοδιάνυσμα

ή $(A - \lambda I)v = 0_{\mathbb{R}^2}$

Θέτουμε την ορίζουσα $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ή $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = -1$

Για $\lambda_1 = 1$ $\quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda_1 I)v_{\lambda_1} = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{\lambda_1}^1 \\ v_{\lambda_1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -U_{\lambda_1}^1 + U_{\lambda_1}^2 &= 0 \\ U_{\lambda_1}^1 - U_{\lambda_1}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U_{\lambda_1}^2 = U_{\lambda_1}^1$$

$$V(\lambda_1 = 1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \right\} \quad (\text{ιδιόχωρος για } \lambda_1 = 1)$$

Για $\lambda_2 = -1$ $\quad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda_2 I) U_{\lambda_2} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\lambda_2}^1 \\ U_{\lambda_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$U_{\lambda_2}^2 = -U_{\lambda_2}^1$$

$$V(\lambda_2 = -1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \right\}$$

Αρα για $k = 2$ εχουμε τα ακόλουθα ιδιοδιανύσματα

$$V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad U_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ε) Για να είναι τα $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}$ ορθοκανονικά πρέπει

i) Να είναι ορθογώνια δηλαδη $\langle U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2} \rangle = 0$

ii) Να έχουν νορμα ίση με τη μοναδα $\|U_{\lambda_1}\| = 1$ και $\|U_{\lambda_2}\| = 1$

Παρατηρούμε ότι,

$$\langle U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}\rangle = V_{\lambda_1}^T V_{\lambda_2} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 + (-2)\cdot 2 = 0$$

Άρα τα $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους

Σχετικα με το μέτρο του διανύσματος $V_{\lambda_1}$ εχουμε

$$\|V_{\lambda_1}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Αντίστοιχα η νορμα του $V_{\lambda_2}$ είναι

$$\|V_{\lambda_2}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Για ενα οποιοδήποτε διάνυσμα $0 \neq x \in V$ ισχύει

$$\left\|\frac{1}{\|x\|}\cdot x\right\| = \underbrace{\left|\frac{1}{\|x\|}\right|}_{\substack{>0 \\ (\text{βαθμωτά})}}\cdot \|x\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$$

Άρα διαιρόντας ενα οποιοδηποτε διανυσμα με την νορμα του παιρνουμε ένα διάνυσμα που έχει νορμα πάντα ίση με τη μονάδα. Άρα στο παράδειγμα μας

$$\bar{V}_{\lambda_1} = \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|}V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{V}_{\lambda_2} = \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|}V_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} \\ -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\langle \bar{V}_{\lambda_1}, \bar{V}_{\lambda_2}\rangle = \left\langle \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|}V_{\lambda_1}, \frac{1}{\|V_{\lambda_2}\|}\cdot V_{\lambda_2}\right\rangle = \frac{1}{\|V_{\lambda_1}\|}\cdot\frac{1}{\|V_{\lambda_2}\|}\langle V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}\rangle = 0$$

Άρα τα νέα ιδιοδιανύσματα $\bar{U}_{\lambda_1}, \bar{U}_{\lambda_2}$ είναι ορθοκανονικά

γ) Όταν τα ιδιοδιανύσματα είναι ~~ορθογώνια~~ ορθοκανονικά

$$P_A = [\underset{2\times1}{\bar{V}_{\lambda_1}} \ \underset{2\times1}{\bar{V}_{\lambda_2}}] \quad \text{οπου} \quad U_{\lambda_1} \cdot U_{\lambda_2} = 0$$

Παρατηρήστε ότι

$$P_A \cdot P_A^T = [\bar{U}_{\lambda_1} \ \bar{V}_{\lambda_2}] \begin{bmatrix} \bar{V}_{\lambda_1}^T \\ \bar{V}_{\lambda_2}^T \end{bmatrix} = \underset{2\times1}{\bar{V}_{\lambda_1}} \cdot \underset{1\times2}{\bar{V}_{\lambda_1}^T} + \bar{V}_{\lambda_2} \bar{V}_{\lambda_2}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} \\ -2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2/8 & 2^2/8 \\ 2^2/8 & 2^2/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^2/8 & -2^2/8 \\ -2^2/8 & 2^2/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/8 & 4/8 \\ 4/8 & 4/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/8 & -4/8 \\ -4/8 & 4/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα όταν τα ιδιοδιανύσματα του A είναι ορθοκανονικά ισχύει

$$P_A^T = P_A^{-1}$$

Εναλλακτικά παρατηρίστε

$$P_A^T P_A = \begin{pmatrix} \bar{v}_{\lambda_1}^T \\ \bar{v}_{\lambda_2}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_{\lambda_1} & \bar{v}_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_{\lambda_1}^T \bar{v}_{\lambda_1} & \bar{v}_{\lambda_1}^T \bar{v}_{\lambda_2} \\ \bar{v}_{\lambda_2}^T \bar{v}_{\lambda_1} & v_{\lambda_2}^T v_{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \bar{v}_{\lambda_1}, \bar{v}_{\lambda_1} \rangle & \langle \bar{v}_{\lambda_1}, \bar{v}_{\lambda_2} \rangle \\ \langle \bar{v}_{\lambda_2}, \bar{v}_{\lambda_1} \rangle & \langle \bar{v}_{\lambda_2}, \bar{v}_{\lambda_2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \|v_{\lambda_1}\|^2 & 0 \\ 0 & \|v_{\lambda_2}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο διαγώνιος πίνακας του $A$, $\Delta_A$ θα είναι

$$\Delta_A = P_A^{-1} A P_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}}_{P_A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}}_{P_A}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

δ) Από το φροντιστήριο 6 γνωρίζουμε ότι

$$A^n = P_A \Delta_A^n P_A^{-1}$$

Άρα
$$A^{2009} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{2009} & 0 \\ 0 & (-1)^{2009} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{8} & 2/\sqrt{8} \\ 2/\sqrt{8} & -2/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$