Μαθηματικός Λογισμός Ι

(21η Διάλεξη)

Ασκήσεις στις Σειρές
και Δυναμοσειρές

Άσκηση 1: Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2}\right)}{xe^x - x} = 2$$

Λύση Υποδείξεις

1) Ιδιότητες λογαρίθμων

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

2) Ανάπτυγμα Taylor της $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

3) Ανάπτυγμα Taylor της e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Άσκηση 2: Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + x\cos x - 3\sin x}{x^4 \cdot \sin x} = \frac{1}{60}$$

Λύση: Υποδείξεις

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Σύγκλιση Σειρών.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Υπολογίζω το μερικό άθροισμα

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Επίσης $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\infty$

άρα η σειρά αποκλίνει

(2) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

Κριτήριο ρίζας

συγκλίνει

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Κριτήριο ολοκλήρωσης

αποκλίνει

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx$$

(4) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά (με ακρίβεια 0.01) την αριθμητική τιμή της σειράς.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$$

Υπόδειξη: Βρείτε το n για το οποίο ισχύει ότι $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^7}\,dx < 0.01$