Μαθηματικός Λογισμός Ι

(19η Διάλεξη)

Δυναμοσειρές

(Μέρος Β΄)

Βασικό Τυπολόγιο

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Εφαρμογές Αναπτυγμάτων

1. Υπολογισμοί ορίων

2. Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Λύση $\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1 - x}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

Λύση $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots\right] = 1.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να προσεγγισθεί η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος (χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους της σχετικής δυναμοσειράς).

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$$

$f(x) = \alpha_0 + a_1 x + \alpha_2 x^2$

<u>Λύση</u>

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots\right)dx =$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}\right)dx =$$

$$=\left[\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\frac{x^6}{6\cdot 6!}\right]_0^1$$

άρα η αριθμητική τιμή είναι

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{96}+\frac{1}{4320}.$$

Μια άλλη προσέγγιση για τη διωνυμοσειρά είναι η εύρεση του αναπτύγματος Taylor.
(που είχαμε δει παλαιότερα στον διαφορικό λογισμό).

Όπως είδαμε κάθε συνάρτηση που είναι $(n+1)$-φορές διαφορίσιμη μπορεί να γραφεί ως εξής

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

όπου το ξ είναι ένα σημείο κάπου μεταξύ των σημείων x_0 και x.

Ο τελευταίος όρος του αναπτυγμ. Taylor

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

που περιέχει και τον άγνωστο ξ

κανονίζει και το σφάλμα της προσέγγισης

από τους πρώτους n -όρους.

Εάν γνωρίζουμε ένα φράγμα για την (n+1) παράγωγο

$$|f^{(n+1)}(x)| < K \quad \forall x,$$

τότε προφανώς και $|f^{(n+1)}(\xi)| < K$

άρα μπορούμε να έχουμε ένα

φράγμα για το σφάλμα της

προσέγγισης

Το ανάπτυγμα Taylor για $x_0 = 0$ χαρακτηρίζεται ως ανάπτυγμα ή σειρά McLaurin.

Δηλ. έχουμε:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \dots$$

$$\dots + f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Παράδειγμα 1: Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor.

Λύση: Θα αναπτύξουμε την $f(x)$ λαμβάνοντας $x_0 = 0$ (σειρά MacLaurin).

Αρχικά υπολογίζουμε τις παραγώγους της $f(x)$.

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

Επίσης ισχύει $f(0) = e^0 = 1$.

Εφαρμόζω τον γενικό τύπο για $x_0 = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Παράδειγμα 2: Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor.

Αρχικά παρατηρώ ότι $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$

Στη συνέχεια βρίσκω τις παραγώγους n-οστής τάξης

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

Μια γενική παρατηρώ

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Εφαρμόζω τον τύπο του Taylor για $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

π.χ. $\ln 6 = \ln(1+5) = 5 - \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{3} - \frac{5^4}{4} + \frac{5^5}{5}$

Παράδειγμα 3: Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά τη βασική τριγωνομετρική συνάρτηση του συνημιτόνου

$$f(x) = \cos x$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor

Αρχικά παρατηρώ ότι $\cos 0 = 1$ και στη συνέχεια υπολογίζω τους παραγώγους.

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = (-\cos x)' = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$

Συμπεραίνουμε ότι

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ 0 & n = 4k+3 \\ 1 & n = 4(k+1) \end{cases}$$

Άρα εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Παράδειγμα 4: Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά τη βασική τριγωνομετρική συνάρτηση του συνημιτόνου

$$f(x) = \sin x$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor

Ομοίως με το παραπάνω παράδειγμα υπολογίζω τις παραγώγους συναρτήσεις (n-οστής τάξης) ... και καταλήγουμε

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Παράδειγμα 5 : Να προσεγγίσετε την f χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές και να διαχωρίσετε τον σταθερό όρο και τις δυνάμεις x, x^2, x^3.

$$f(x) = \ln(1+\sin x).$$

$$\simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Λύση : Γνωρίζω ότι

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

άρα για $y = \sin x$ θα έχω

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} - \dots$$

όμως γνωρίζω ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

οπότε αντικαθιστώντας έχω τον εξής τύπο.

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta$$

$$\ln(1+\sin x) =$$

$$= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right) - \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^2}{2} + \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^3}{3} + \dots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3} + \{x^4, x^5 \dots\}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \alpha_3 = \frac{1}{6}$$

$f(x) = \ln(1+\sin x)$ $\quad f(0) = \_\_$

$f'(x) =$ $\quad f'(0) =$

?

$f''(x) =$ $\quad f''(0) =$

$f'''(x) =$ $\quad f'''(0) = \_\_$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$