Μαθηματικός Λογισμός Ι

1η Διάλεξη.

(Εισαγωγή)

<u>Εισαγωγικές έννοιες</u>

<u>Α. Στοιχεία θεωρίας Συνόλων</u>

1. Τι είναι Σύνολο;

Σύμφωνα με τον Cantor, Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά διά της εμπειρίας μας ή της διανόησής μας, είναι καλώς ορισμένα και διακρίνονται ευκρινώς μεταξύ τους.

2. Τρόποι περιγραφής ενός συνόλου.

$A = \{3, 7, 11\}$ $B = \{2, 4\}$ $\Gamma = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ $\Gamma = \{x | x \in N,\ x \text{ άρτιος αριθμό}\}$

3. Τι είναι η Ισχύς ή πληθικός αριθμός του συνόλου A ; και συμβολίζεται με|A|

4. Πράξεις μεταξύ συνόλων : Ένωση , Τομή, Διαφορά, Συμπλήρωμα

5. Ορισμός της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου A x B

Π.χ $A\,x\,B = \{(3,2)\,,(3,4),(7,2)\,,(7,4),\ (11,2),(11,4)\}$

Β. Αξιωματική θεμελίωση Πραγματικών αριθμών

Αξιωματική θεμελίωση φυσικών αριθμών $N = \{1, 2, 3 \dots\}$ μέσω των αξιωμάτων του Peano

Δημιουργία συνόλου ακεραίων αριθμών, ως καρτεσιανό γινόμενο $Z = NxN$

Δημιουργία συνόλου ρητών αριθμών, ως καρτεσιανό γινόμενο $Q = ZxZ$

Αξιωματική θεμελίωση πραγματικών αριθμών , τομές Dedekind (εγκιβωτισμός)

Γ. Γενικές έννοιες

Αξίωμα Ελαχίστου Φράγματος (ή πληρότητας)

Αρχιμήδεια ιδιότητα

Υποσύνολα πραγματικών αριθμών

Διαδικασία επαγωγής

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ φυσικοί αριθμοί

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} : \kappa \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{Z}^* \right\}$

ρητοί αριθμοί

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ πραγματικοί αριθμοί

$\mathbb{Q}^c$: άρρητοι αριθμοί (π.χ. $\sqrt{2}, e$

Παραδείγματα

- 1,3 είναι ρητός, γράφεται ως κλάσμα $= \frac{13}{10}$
- 1,333... είναι ρητός $= \frac{4}{3}$
- 1,376825943335670712... άρρητος

Άσκηση: Να δείξετε ότι ο αριθμός $\rho = 7,452373737...$ είναι ρητός και να γράψετε το ισοδύναμο κλάσμα.

Απάντηση: Θα γράψουμε το ισοδύναμο κλάσμα σύμφωνα με την εξής διαδικασία

$$\rho = 7,452 + 0,000373737... =$$

$$= \frac{7452}{1000} + \frac{1}{1000} \times 0,373737... =$$

$$= \frac{7452}{1000} + \frac{1}{1000} \times \frac{37}{99} =$$

$$= \frac{7452}{1000} + \frac{37}{99000} = \frac{99 \times 7452 + 37}{99000} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{737785}{99000}}$$

- Π = πεπερασμένο σύνολο

  $Π \longleftrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$

- A = αριθμήσιμο σύνολο

  $A \longleftrightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$

- Άπειρο σύνολο = Μή πεπερασμένο

- Μή αριθμήσιμο σύνολο

Παραδείγματα

$A = \{7, 40, 52, 194\}$, A πεπερασμένο

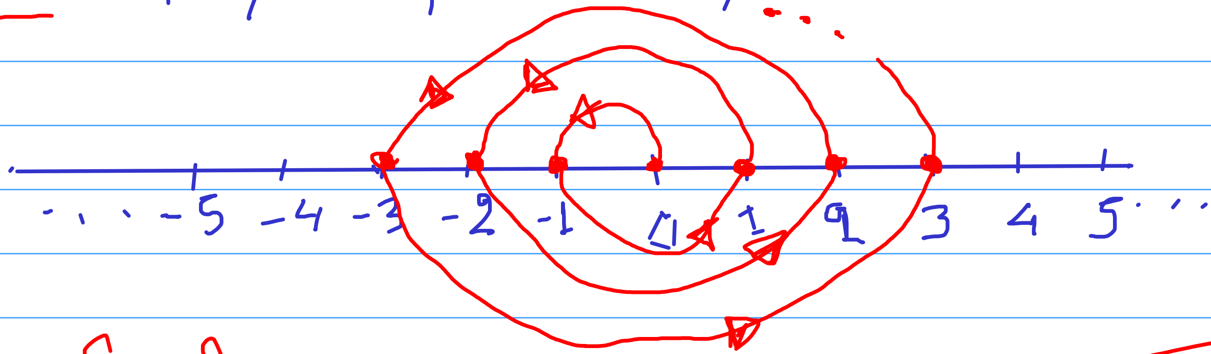
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ άρτιοι, B άπειρο

$Γ = \mathbb{Z}$, $Δ = \mathbb{Q}$ Γ, Δ αριθμήσιμα

$E = \mathbb{R}$ E μή αριθμήσιμο!

Πρόταση: Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο!

Υπόδειξη



διαδικασία αρίθμησης του $\mathbb{Z}$

2η απόδειξη

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση f

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : z \to f(z) = \begin{cases} 2z+1, & z \geq 0 \\ -2z, & z < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (ένα προς ένα) και επί (δηλ. $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$)

Συνεπώς το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο