Μαθηματικός Λογισμός Ι

(17η Διάλεξη)

Σειρές

Μέρος Β΄

Στην παρούσα διάλεξη θα δούμε τα βασικά κριτήρια σύγκλισης των σειρών (εκτός από αυτά που έχουμε δει στην προηγούμενη διάλεξη και συνοπτικά τα επαναλαμβάνουμε παρακάτω)

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

$\boxed{1^o}$ Υπολογισμός (εάν είναι εφικτό) του μερικού αθροίσματος S_n και διερεύνηση ορίου $\lim_{n\to\infty} S_n$

$\boxed{2^o}$ Υπολογισμός ορίων αντίστοιχης ακολουθίας $\lim_{n\to\infty} a_n$. Εάν υπάρχει και είναι μηδέν ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) τότε η σειρά $\underbrace{}_{\text{μπορεί να}}$ συγκλίνει ή να μην συγκλίνει τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κριτήρια σύγκλισης

Σε κάθε άλλη περίπτωση όπου δεν ισχύει το μηδενικό όριο η σειρά αποκλίνει

$\boxed{3^o}$ Εξετάζουμε εάν πρόκειται για κάποια ειδική κατηγορία

Α. Γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot r^n$

- Εάν $|r|<1$ τότε η σειρά συγκλίνει
- Εάν όχι τότε η " αποκλίνει.

Β. Αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

- Εάν $p>1$ τότε η σειρα συγκλίνει
- Εάν $p \leq 1$ τότε η σειρα αποκλίνει

Γ. Τηλεσκοπικές σειρές

όπου οι όροι τους αλληλοαναιρούνται

π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots = 1$

$\boxed{4^{o}}$ Κριτήριο Ολοκληρώματος (Integral Test)

Έστω $f(x)$ συνεχής θετική, φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[1,+\infty)$ και $f(n)=a_n$

τότε ισχύουν τα παρακάτω·

Ⓐ Εάν $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Ⓑ Εάν $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ αποκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

__Παράδειγμα__ Αποδείξτε ότι η αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει}$$

__Λύση__ Εξετάζουμε το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln|x| - \ln 1$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln x - 0 = +\infty$$

Άρα το ολοκλήρωμα αποκλίνει

συνεπάγεται ότι και η αντίστοιχη σειρά αποκλίνει

$\boxed{5^{o}}$ Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison Test)

Έστω δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (θετικών όρων) $0 < a_n \leq b_n$ για κάθε n

Ⓐ. Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Ⓑ Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει ΔΕΝ μπορώ να αποφανθώ για την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

και Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ΔΕΝ μπορώ να αποφανθώ για την $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

<u>Παράδειγμα</u> Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$$

<u>Λύση</u>: Παρατηρώ ότι $0 < \frac{\cos^2 n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Επίσης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (αρμονική σειρά για $p = 2 > 1$) οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ επίσης συγκλίνει

6ο Κριτήριο σύγκρισης ορίου.

Έστω δύο σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ εξετάζω εάν υπάρχει το παρακάτω όριο

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Εάν $c>0$ τότε οι δύο σειρές συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο (δηλ. ή συγκλίνουν ή αποκλίνουν)

Παράδειγμα: Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7+3n^2}}$$

Λύση: Χρησιμοποιώ την αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ (η οποία γνωρίζω ότι αποκλίνει)

$\frac{1}{n} > 0$ και $\frac{1}{\sqrt{7+3n^2}} > 0$

$$c = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{7+3n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{7+3n^2}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{7}{n^2}+3}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} + 3} = \sqrt{3} > 0$$

Άρα η αρχική σειρά αποκλίνει

$\boxed{7^o}$ Κριτήριο πηλίκου (Ratio test)

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και ορίζουμε

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Ⓐ $\ell < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει (και απολύτως)

Ⓑ $\ell > 1$ " " " αποκλίνει

Ⓒ $\ell = 1$ ΔΕΝ μπορούμε να αποφανθούμε

Παράδειγμα: Διερευνήστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$$

Λύση: $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n!}{n^n}}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

$\boxed{8^{o}}$ Κριτήριο Ρίζας (root test)

Έστω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και θέτω

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

(A) $\ell < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει (και απολύτως)

(B) $\ell > 1$ " " " αποκλίνει

(Γ) $\ell = 1$ ΔΕΝ μπορούμε να αποφανθούμε

Παράδειγμα: Να διερευνήσετε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

Λύση $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

$\boxed{9^o}$ Κριτήριο Εναλλάσσουσας Σειράς (Alternating Series Test).

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου ισχύει

$a_n = (-1)^n b_n$ ή $a_{n+1} = (-1)^{n+1} b_{n+1}$ $b_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία (έστω για $n \geq k$)

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ικανοποιεί τις παραπάνω προυποθέσεις άρα συγκλίνει

$\boxed{10^o}$ Απόλυτη σύγκλιση

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα (δηλ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) τότε και η ίδια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο): Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει ενώ η $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ ΔΕΝ συγκλίνει

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ υπολοίπου σειράς

(ή προσέγγιση της αριθμητικής τιμής μιας συγκλίνουσας σειράς)

Έστω η σειρά $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $R_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

τότε αποδεικνύεται ότι

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

ή ισοδύναμα

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le s_n + \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

όπου $f(n) = a_n$.

Παράδειγμα: Να προσεγγίσετε την αριθμητική τιμή της παρακάτω σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$ (ακρίβεια στο 1χιλιοστό = 0.001)

Λύση: Πρέπει να θέσουμε το υπόλοιπο μικρότερο από 0.01 δηλ.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}dx < 0.01 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^{\infty} < 0.01 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2n^2} < 0.01 \ldots \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{0.02}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n > 7{,}07}$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ προσεγγίζεται αριθμητικά από το άθροισμα των 8 (οκτώ) όρων.

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3}$$