Μαθηματικός Λογισμός I

(16η Διάλεξη)

Σειρές

Μέρος Α΄

Σειρές!

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2$$

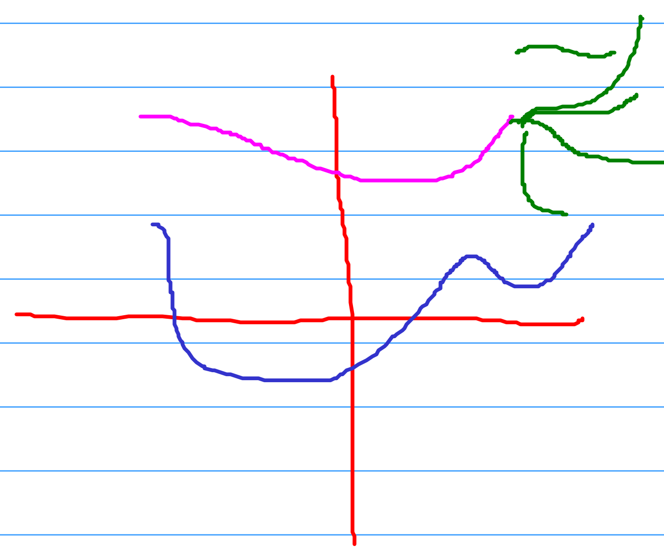
$$\Gamma = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

ΔΕΝ υπάρ

$$\Delta = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \quad \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$



Παράδειγμα.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$$

Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου

$$a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}, \quad a_1 = 1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Δείξτε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει. Να βρείτε το όριο.

Λύση. Αποδεικνύουμε ότι η a_n είναι *(Επαγωγικά)* φραγμένη και μονότονη (φθίνουσα) συνεπώς η a_n θα συγκλίνει (έστω L)

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ή} \quad \underbrace{L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\text{απορρίπτεται}}$$

συνεπώς $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Από μία ακολουθία a_n προκύπτει μία σειρά, όπου η σειρά είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της ακολουθίας. Δηλαδή, η σειρά ορίζεται ως εξής.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Ορίζουμε το μερικό άθροισμα

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

οπότε $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$

Έστω $L \in \mathbb{R}$

Εάν το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει. και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Για κάθε σειρά υπάρχουν δύο βασικά ερωτήματα

1. Εάν συγκλίνει ΝΑΙ ή ΟΧΙ;

2. Εφόσον συγκλίνει ποιο είναι το αντίστοιχο όριο ℓ;

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε διάφορες μεθόδους διερεύνησης των παραπάνω δύο ερωτημάτων. Πριν προχωρήσουμε σε αυτές τις μεθόδους κριτήρια θα απαντήσουμε τις παρακάτω ερωτήσεις με τους βασικούς ορισμούς.

Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα

Παράδειγμα 1. Έστω η ακολουθία $\frac{n^7+3n-1}{n^6-4n+2}$

$$a_n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Να εξετάσετε εάν συγκλίνει η αντίστοιχη σειρά και να βρείτε το όριο της.

Λύση Η ακολουθία a_n είναι η εξής

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

κ.ο.κ.

Η αντίστοιχη σειρά είναι η εξής

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

Για να βρω εάν συγκλίνει θα υπολογίσω αρχικά το μερικό άθροισμα

$$S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \, \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Οπότε σύμφωνα με τους ορισμούς έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-0 = 1$$

Συνεπώς η σειρά συγκλίνει και μάλιστα η σχετική αριθμητική τιμή είναι ίση με τη μονάδα, 1.

Αντικριτήριο

Θεώρημα: Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Απόδειξη: Έστω η σειρά συγκλίνει τότε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$ όπου $S_n = a_1 + \dots + a_n$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ τότε

οπωσδήποτε η αντίστοιχη σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ΔΕΝ συγκλίνει

ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

παράδειγμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ;$

Λύση $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\qquad \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right) + \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{m+1} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

Έστω $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ τότε ορίζεται η αρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\nu} + \dots$$

Αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη σειρά ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}$$

και γενικά $\quad S_{2^\nu} > 1 + \frac{\nu}{2}$

άρα η υπακολουθία S_{2^ν} αποκλίνει οπότε και η ακολουθία S_ν αποκλίνει

Ιδιότητες πράξεων μεταξύ σειρών:

① $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

② $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσες

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = ;$ συγκλίνει

<u>Λύση</u>: $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ ΔΕΝ συγκλίνει